B

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2015 – **MATHEMATIQUES**
Séries : C-E
Durée : 4 heures
Coef. : 5

L'usage de la calculatrice est autorisé. Le barème est susceptible de changer.

Exercice 1 — 5 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm , on considère les points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0=-4+i$, $z_1=-2-3i$ et $z_2=1-4i$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que :

$$S(M_0)=M_1 \quad \text{et} \quad S(M_1)=M_2.$$

b. Établir que l'écriture complexe de S est :

$$z'=\frac{1+i}{2}z+\frac{1-3i}{2}.$$

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z\neq 0$, et son image $M'=S(M)$ d'affixe z'.
Vérifier la relation $\omega-z'=-i(z-z')$. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n , le point M_n a pour affixe z_n. Et le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1}=S(M_n)$ et on pose $u_n=M_nM_{n+1}$.

a. Placer les points M_0 , M_1 , M_2 et construire géométriquement les points M_3 , M_4 , M_5 et M_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\quad v_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. **a.** Calculer, en fonction de n, la longueur ΩM_n notée r_n.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $r_n<0,001$.

Exercice 2	5 points

1. On considère l'équation (E) : $10x+11y\cancel{+12z}=95$ où x, et y et $\cancel{z}$ sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u\ ,v)$ vérifiant $10x+11y=1$; en déduire une solution particulière $(x_0\ ,y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $(O\ ,I\ ,J,K)$ un repère orthonormé de l'espace.

On considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation : $10x+11y+12z=95$.

On considère les points du plan $(\mathscr{P})$ qui appartiennent aussi au plan $(O\ ,I\ ,J)$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan $(\mathscr{P})$ dont les coordonnées x , y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y=2p+1$ où p est entier naturel.

Montrer qu'on a : $p+z\equiv 2\ [5]$.

c. On pose $p+z=5q+2$ où q est entier naturel.

Montrer que les entiers naturels x , p et q vérifient la relation : $x+p+6q=6$.

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de $(\mathscr{P})$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Problème	10 points

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n , qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{1+n\ln(x-1)}{(x-1)^2}.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

1) Calculer $f_n'(x)$ et démontrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln(x-1)$.

2) Résoudre l'inéquation $f_n'(x)\geq 0$. En déduire le signe de $f_n'(x)$.

3) Déterminer les limites de f_n en 1 et en $+\infty$.

4) a) Démontrer que pour tout n entier supérieur ou égal à 2 : $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}+1\right)=\frac{n}{2}e^{\frac{2-n}{2n}}$.

b) Établir le tableau de variation de f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

Partie B : Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 5 cm). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1) Construire (C_2) et (C_3).

2) a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire que pour tout n entier supérieur ou égal à 2 : $f_n(x) = n\left(f_3(x) - f_2(x)\right) + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3).

Partie C : Calcul d'aires

1) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = e + 1$.

2) On note A_n l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 2$ et $x = e + 1$.

a) Calculer A_2.

b) Déterminer la nature de la suite A_n.