INTERROGATION N°4

EXERCICE I (4)

Soient les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i.$$

1°) Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

2°) En déduire que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

3°) On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$

a) Résoudre cette équation dans IR.

b) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE II (5)

Soient A, B, C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. On pose a = BC, b = CA et c = AB.

1°) On considère le vecteur :

$$\vec{u} = a^2\,\overrightarrow{BC} + b^2\,\overrightarrow{CA} + c^2\,\overrightarrow{AB}.$$

Montrer que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\,\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\,\overrightarrow{AB}$.

En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.

2°) Pour tout point M du plan, on pose :

$$f(M) = a^2\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'}.$$

a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, calculer f(O).

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$.

En déduire la valeur de f(G).

c) Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan tels que f(M) = 0.

PROBLEME

ln *désigne la fonction logarithme népérien.*
Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall\ x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \\ f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

Les résultats d'une partie non traitée pourront être utilisés dans les parties suivantes.

Partie I: $2\frac{3}{4}$

1°) Soit h la fonction définie par :

$$h : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{-4x}{x^2-1} + 2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

Etudier les variations de h sur son ensemble de définition.

2°) Du calcul de h(0) et de $\lim\limits_{+\infty} h$, déduire que:

$\forall x \in [0, 1[\quad h(x) \geq 0$

et $\forall x \in]1, +\infty[\quad h(x) < 0$

On ne cherchera pas à déterminer la limite de h quand x tend vers 1.

Partie II $3\frac{1}{4}$

1°) Soit g la fonction définie par:

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2$$

Etudier les variations de g sur son ensemble de définition.

2°) Préciser la limite de g en 1.

3°) a) Justifier que :

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x-1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right] = 1.$$

b) Démontrer que: $\lim\limits_{+\infty} g = 2$

4°) a) Déduire des questions précédentes qu'il existe un nombre réel unique α, élément de] 0; 1[tel que g(α) = 0.

b) Démontrer que : 0,6 < α < 0,7.

(Pour les calculs on utilisera une machine ou les indications suivantes:

$0{,}69 < \ln 2 < 0{,}70$ et $1{,}73 < \ln\frac{17}{3} < 1{,}74$)

Partie III 5

Etude de f.

1°) Etudier la parité de f.

2°) a) Démontrer que f est continue en 1.

b) f est-elle dérivable en 1?

que peut-on en déduire pour la représentation graphique (C_f) de f?

3°) Etudier les variations de f sur IR. +

4°) a) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.

b) On admettra que :

$$\lim_{x \to +\infty}[f(x) - 2x - 1] = 0.$$

Que peut-on en déduire pour (C_f) ?

c) Utiliser l'égalité g(α) = 0 pour démontrer que : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$

d) Tracer (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm). On indiquera les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse -1; 0; 1 ; α et - α.

INTERROGATION N°4
CORRECTION

EXERCICE I

1°) Soient les nombres complexes : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

On a alors : $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{2}$ et $|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

• $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}$, $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ donc $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

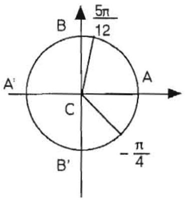
2°)Or $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} + i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$ (α)

Mais $\text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{12}$ et $|Z| = 1$ donc $Z = \cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})$ (β)

des égalités (α) et (β) on en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3°)$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2 \iff 4\cos(\frac{\pi}{12})\cos x + 4\sin(\frac{\pi}{12})\sin x = 2$

$\iff \cos(x - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ d'où $\begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$



EXERCICE II

1°) $\vec{u} = a^2\,\overrightarrow{BC} + b^2\,\overrightarrow{CA} + c^2\,\overrightarrow{AB} = a^2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - b^2\,\overrightarrow{AC} + c^2\,\overrightarrow{AB} = (a^2 - b^2)\,\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\,\overrightarrow{AB}$

si $\vec{u}$ est le vecteur nul, ses coordonnées dans le repère (A; $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$) sont nulles donc $a^2 - b^2 = 0$ et $c^2 - a^2 = 0$ équations qui entraînent, puisque les trois nombres a,b,c sont positifs, que a = b = c donc que le triangle ABC est équilatéral (contraire aux hypothèses) donc le vecteur $\vec{u}$ ne peut être nul.

2°) $f(M) = a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'}$.

a) $f(O) = a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC'}$., mais les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ sont respectivement orthogonaux aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$. Alors, f(O) =0

b) G étant le centre de gravité du triangle ABC : $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$. De même on en déduit que $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{GB'} = \frac{1}{6}(c^2 - a^2)$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GC'} = \frac{1}{6}(a^2 - b^2)$.D'où en remplaçant les produits scalaires on obtient f(G)= 0

c) $f(M) = 0 \iff a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'} = 0$

$\iff a^2\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA'}) + b^2\,\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB'}) + c^2\,\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC'}) = 0$

$\iff \overrightarrow{MG}\cdot\vec{u} + f(G) = 0 \iff \overrightarrow{MG}\cdot\vec{u} = 0$

Le point M décrit donc une droite passant par G et orthogonale au vecteur $\vec{u}$. Cette droite contenant aussi le point O (distinct de G car ABC n'est pas équilatéral), M décrit la droite (GO)

PROBLEME

Partie I:

1°) Soit h la fonction définie par : h : [0; +∞ [----------> IR

$x \longmapsto \frac{-4x}{x^2 - 1} + 2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

D_h=[0; 1[U]1 ; +∞ [

$$h'(x) = \frac{-4(x^2-1) - 2x(-4x)}{(x^2-1)^2} + 2\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{4x^2+4}{(x^2-1)^2} - \frac{4}{x^2-1} = \frac{8}{(x^2-1)^2}$$

∀ x ∈[0 ; + ∞ [, h'(x) > 0, donc la fonction h est strictement croissante

x	0	1	+∞
h(x)	0 ↗	‖	↗ 0

2°) Sur l'intervalle [0; 1[, h est strictement croissante et h(0) = 0 donc ∀ x ∈[0 ; 1 [, h(x) ≥0.

De même comme $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$, ∀ x ∈]1 ; + ∞ [h(x) < 0.

Partie II

1°) Soit g la fonction définie par: $g(x) = 2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2$. On a D_g=[0; 1[U]1 ; +∞ [

g'(x) = h(x) donc g' a le même signe que h

2°) $\lim_{x\to1}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$ donc $\lim_{x\to1} g(x) = +\infty$ .d'autre part : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{2}\ln(1 + \frac{2}{x-1})\right] = \lim_{\substack{h\to0 \\ h=\frac{2}{x-1}}} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

3°) donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4x}{x-1}\frac{x-1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 2\right] = 4 - 2 = 2$

x	0	1	+∞
g'(x)	+	‖	—
g(x)	-2 ↗ +∞	‖	+∞ ↘ 2

4°) Sur] 1 ; +∞[, g(x) > 2 donc l'équation g(x) = 0 n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Sur] 0; 1[, g est continue et strictement croissante, sa restriction à cet intervalle est donc une bijection de] 0; 1 [sur]- 2 ; +∞ [. Or 0∈]- 2 ; +∞ [donc 0 admet un antécédent unique α ∈] 0; 1[par g.

Soit 0,6 < x < 0,7 alors 1,6< x+1 < 1,7 (&) et 0,3 < 1 - x < 0,4 c'est-à-dire $\frac{1}{0,4} < \frac{1}{1-x} < \frac{1}{0,3}$ (£)

en multipliant membre à membre les deux inégalités (&) et (£) on obtient $4 < \left|\frac{x+1}{x-1}\right| < \frac{17}{3}$ .La fonction ln étant strictement croissante : 2 ln $2 < \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < \ln\frac{17}{3}$ ce qui nous donne $\begin{cases} 1,38 < \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1,74 \\ 1,2 < 2x < 1,4 \end{cases}$

c'est-à-dire (1,2)(1,38)-2<g(x)<(1,4)(1,74)-2 <=> -0,344 < g(x) <0,436 donc g<]0,6 ; 0,7[> =]-0,344 ; 0,436[

alors comme 0 ∈]-0,344 ; 0,436[on en déduit que son antécédent α ∈]0,6 ; 0,7[

Partie III

1°)D_f = IR, 0 centre de symétrie de D_f. Calculons

$$f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right| = (x^2-1)\ln\left|\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right| = -(x^2-1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

On a donc f(-x) = - f(x) pour tout réel x. Donc f est impaire, on l'étudiera alors sur IR^+

2°) Continuité en 1 :

$\lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to1}(x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to1}(x^2-1)[\ln(x+1) - \ln(x-1)] = \lim_{x\to1}(x^2-1)\ln(x+1) - \lim_{x\to1}(x$

Or f(1) = 0 donc f est continue en 1, elle est donc continue sur iR^+.

Dérivabilité en 1 :

$\lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} (x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$; f n'est donc pas dérivable en 1 mais son graphe C_f admet au point (1 ; 0) une tangente verticale.

3°) f'(x) = g(x). Donc f' a le même signe que g. f est donc décroissante sur [0 ; a] et croissante sur [a ; +∞[

4°) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2-1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \lim_{x\to+\infty} 2(x+1) \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = +\infty$

si on admet que $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x+1)] = 0$ alors, la droite d'équation y = 2 x + 1 est asymptote à C_f en + ∞.

On sait que g(α) = 0 <=> $2\alpha\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right| - 2 = 0$ donc $\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right| = \frac{1}{\alpha}$ d'où $f(\alpha) = (\alpha^2 - 1)\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha}$ ce qui nous permet de connaître un encadrement de f(α) : $0,36 < \alpha^2 < 0,49$ donc $-0,49 < -\alpha^2 < -0,36$, soit : $0,51 < 1 - \alpha^2 < 0,64$ ce qui nous donne $\frac{0,51}{0,7} < -f(\alpha) < \frac{0,64}{0,6}$ plus précisément : -1, 07 < f(α) < -0,72