DEVOIR DE MATHS 10

EXERCICE I. 4

Dans le plan orienté, on considère le triangle direct AOO', rectangle en A et isocèle. Les cercles (C) et (C') passant par A et de centre respectifs O et O' se recoupent en B. On note I le centre du carré AOBO'.

1°) D et D' étant diamétralement opposés à A sur les cercles (C) et (C'), démontrer, à l'aide d'une homothétie de centre A, que les points D, B et D' sont alignés.

2°) Soit M un point du cercle (C) distinct des points A et B et soit M' l'intersection de (MB) et du cercle (C').

a) Vérifier que M' est distinct de A, puis démontrer que : $(\overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AD'}) + k\pi$ avec k entier relatif quelconque.

b) En déduire que la rotation r de centre A qui transforme O en O' transforme la droite (AM) en la droite (AM').

c) Prouver que r transforme M en M'.

3°) Soit N le point d'intersection de la droite (M'A) avec le cercle (C). Soit N' le point d'intersection de la droite (MA) avec le cercle (C'). Démontrer que N' est l'image de N par la rotation r.

4°) On suppose que M est distinct de D.

a) Prouver que N est distinct de A. On cosntruit alors le carré NAN'F.

b) Soit s la similitude directe telle que s(B) = O et s(F) = N. Donner les éléments caractéristiques de s.

c) Construire l'image du cercle (C) par s.

EXERCICE II 5

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O, unité graphique cinq centimètres, on donne les points A, B, C d'affixes respectives : i, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + i$; on appelle I, J, K les milieux respectifs des segments [OB], [AC] et [BC] et s la similitude directe qui transforme A en I et O en B.

1°) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Donner l'écriture complexe de s.

c) En déduire l'affixe ω du centre Ω de s. Placer le point Ω dans P.

d) Quelle est l'image par s du rectangle AOBC ?

2°) on considère la transformation $s^2 = s \circ s$.

a) Quelles sont les images de points 0, B et A par s^2 ?

b) Montrer que s^2 est une similitude dont on précisera le centre et le rapport.

c) En déduire que les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.

3°) On définit la suite des points A_n de la façon suivante :

$A_0 = A$ et pour tout entier n, $A_{n+1} = s(A_n)$.

a) On précisera les points A_1, A_2 et A_3 sur la figure.

b) On note u_n la longueur du segment [$A_n A_{n+1}$];

- Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.
- Calculer u_0 et en déduire u_n en fonction de n.
- Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n.
- Quelle est la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$?

PROBLEME 11

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions f_λ définies par :

$$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$$

où λ est un nombre réel non nul.

La partie I est essentiellement consacrée à la recherche du nombre de points d'intersection de la courbe représentative $\mathcal{C}_\lambda$ de f_λ, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. La partie II donne une méthode de calcul approché de l'abscisse de ces points dans le cas particulier où $\lambda = 1$.

5,5

A. 1. Donner l'ensemble de définition de f_λ (on distinguera les deux cas : $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$).

2. *a)* Existe-t-il un lien entre les deux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{C}_{-\lambda}$?

b) Soit Γ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Trouver, lorsque $\lambda > 0$, une translation qui transforme Γ en $\mathcal{C}_\lambda$.

3. On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

a) On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition. En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{D}$.

b) On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition (on pourra par exemple mettre x en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini). Établir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand x décrit le domaine de définition de φ_λ, est $m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda$.

c) Étudier, quand λ décrit $]0, +\infty[$, les variations de $m(\lambda)$; en déduire son signe.

d) Combien, lorsque λ est positif, $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{D}$ ont-elles de points communs?

B. Étude du cas particulier $\lambda = 1$. 4

1. *a)* Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_1$ et la droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on prendra comme unité 3 cm.

b) On appelle P et Q les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{D}$. P est le point d'abscisse négative p, Q le point d'abscisse positive q. Démontrer que : $2 < q < 3$.

2. On se propose de calculer une valeur approchée de q. On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Représenter à l'aide de la courbe $\mathcal{C}_1$ les termes u_0, u_1, u_2 sur $(O, \vec{i})$.

b) Montrer que la suite u est croissante et majorée par q.

c) Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité des accroissements finis, que : $q - u_{n+1} \leq \frac{q - u_n}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$q - u_n \leq \frac{q - u_0}{3^n}$$

et que la suite u converge vers q.

e) Déterminer une valeur approchée de q à 10^{-2} près en justifiant la méthode choisie.

C: $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt$. On pose $f(t) = \frac{1}{1+t}$.

On partage le segment [0, 1] en n segments de même longueur $\frac{1}{n}$ par les points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, ..., $x_i = \frac{i}{n}$, ..., $x_n = 1$.

Démontrer que : $\frac{1}{n} f(x_i) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f(x_{i-1})$.

$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})$

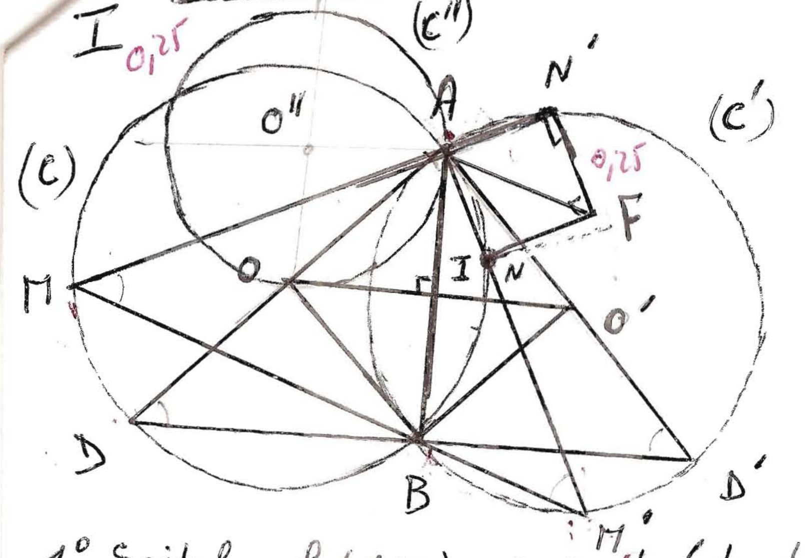
En déduire un encadrement de I.

Trouver la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Devoir N° 10

I 0,25



1° Soit $h = h(A;2)$, O, I et O' étant les milieux respectifs des segments [AD], [OO'] et [AD'] on a $h(O) = D$; $h(I) = B$ et $h(O') = D'$ or O, I, O' alignés et I milieu de [OO'] de plus toute homothétie conserve le milieu et l'alignement donc D, B et D' sont alignés et B est le milieu de [DD']. 0,5

2° a) Si $M' = A$ on aurait avec M commun à (M'B) et (C), M commun à (AB) et (C) et $M = A$ ou $M = B$ ce qui est absurde car $M \neq A$ et $M \neq B$ par hypothèse. Montrons que 0,25

$$(\vec{AM}, \vec{AM'}) = (\vec{AD}, \vec{AD'})\ [\pi]$$

AMDB d'1 part et ABM'D' d'autres parts sont cocycliques donc $(\vec{AM}, \vec{AD}) = (\vec{BM}, \vec{BD})\ [\pi]$ et 0,75

$(\vec{AD'}, \vec{AM'}) = (\vec{BD'}, \vec{BM'})\ [\pi] = (\vec{BD}, \vec{BM'})\ [\pi]$

car B, D et D' alignés. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}(\vec{AM}, \vec{AM'}) &= (\vec{AM}, \vec{AD}) + (\vec{AD}, \vec{AD'}) + (\vec{AD'}, \vec{AM'}) \\ &= (\vec{BM}, \vec{BD}) + (\vec{BD}, \vec{BM'}) + (\vec{AD}, \vec{AD'})\ [\pi] \\ &= (\vec{BM}, \vec{BM'}) + (\vec{AD}, \vec{AD'})\ [\pi] \\ &= (\vec{AD}, \vec{AD'})\ [\pi] \text{ car}\end{aligned}$$

B, M et M' alignés et $(\vec{BM}, \vec{BM'}) = 0\ [\pi]$

d'où $(\vec{AM}, \vec{AM'}) = (\vec{AD}, \vec{AD'})\ [\pi]$.

b) La rotation r de centre A qui transforme O en O' a pour angle $\frac{\pi}{2}$ car le triangle AOO' est isocèle direct et de sens direct en A, par suite $(\vec{AO}, \vec{AO'}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On a 0,5 $(\vec{AM}, \vec{AM'}) = (\vec{AD}, \vec{AD'})\ [\pi]$ or $(\vec{AD}, \vec{AD'}) = (\vec{AO}, \vec{AO'}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $(AM) \perp (AM')$ et r transforme (AM) en la droite (AM').

c) r transforme (C) en (C') et (AM) en (AM') or $M \in (C) \cap (AM)$ et $M' \in (C') \cap (AM')$ donc $r(M) = M'$ 0,25 (car $M \neq A \Rightarrow M' \neq A$).

3° Si $M = D$ on a $M' = D'$ et $N = A = N'$ car $(AM) = (AD)$ et $(AM') = (AD')$ tangent en A à (C') et à (C). Si $M \neq D$ on a $M' \neq D'$ et avec 0,25 $N \neq A$ et $N \in (C) \cap (AM')$ r(N) sera commun à $r(C) = C'$ et $r(AM') = (AM)$ et $r(N) = N'$.

4°. on suppose $M \neq D$

a) Si $N = A$ on aurait $N' = r(N) = r(A) = A$ et alors M serait D ce qui est absurde. donc 0,25 si $M \neq D$ on a $M' \neq D'$ et $N \neq A$.

S	
B	O
F	N

b) $S(B) = O$ et $S(F) = N$

les triangles ABO et AFN sont isocèles et rectangles de sens indirects. On a alors

$\begin{cases} AO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB \\ (\vec{AB}, \vec{AO}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$ 0,75 et $\begin{cases} AN = \frac{\sqrt{2}}{2} AF \\ (\vec{AF}, \vec{AN}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$

Ainsi S est une similitude directe plane de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

c) L'image de (C) est le cercle (C'') de centre S(O) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ AO.

II $A(i)$; $B(\sqrt{2})$ et $C(\sqrt{2}+i)$

I, J, K milieux resp. de $[OB]$; $[AC]$ et $[BC]$

1° a) $S(A) = I$ et $S(O) = B$ determinons k et α.

$$k = \frac{IB}{AO} = \frac{|z_B - z_I|}{|z_O - z_A|} = \frac{|z_B - \frac{z_B}{2}|}{|z_A|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{IB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_I}{-z_A}\right) = \arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2i}\right) =$$

0,5 $= \arg \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc

S est 1 similitude directe plane de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b) Ecrire complexe de S.

avec $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'écriture complexe de S est de la forme $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} i z + b$

avec $S(O) = B$ on a $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} i (0) + b = b$

d'où $\boxed{z' = \frac{\sqrt{2}}{2} i z + \sqrt{2}}$ 0,25

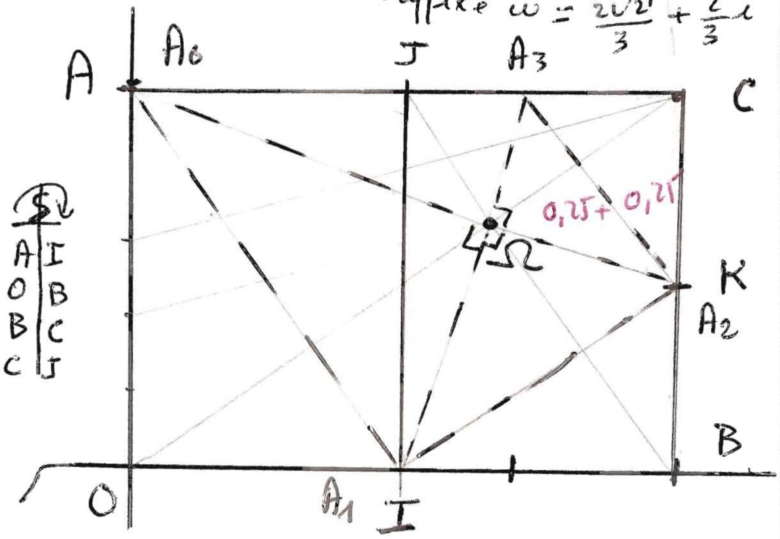
c) Determinons l'affixe ω de Ω centre de S.

$$z' = z \iff z = \frac{\sqrt{2}}{2} i z + \sqrt{2} \iff z = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i}$$

$$\iff z = \frac{\sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

0,5 $\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} i$

le centre Ω de S est d'affixe $\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} i$



$z'_B = \frac{\sqrt{2}}{2} i \sqrt{2} + \sqrt{2} = i + \sqrt{2} = \sqrt{2} + i = z_C$

0,5 $z'_C = \frac{\sqrt{2}}{2} i (\sqrt{2} + i) + \sqrt{2} = i - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i = z_J$

l'image du rectangle $AOBC$ est le rectangle $IBCJ$. Pour placer Ω on peut utiliser $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ car $\omega = \frac{2}{3} z_C$

2° $S^2 = S \circ S$

a) $S^2(O) = S \circ S(O) = S(B) = C$
$S^2(B) = S \circ S(B) = S(C) = J$
$S^2(A) = S \circ S(A) = S(I) = K$ 0,75

car $z'_I = \frac{\sqrt{2}}{2} i \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{i}{2} + \sqrt{2} = z_K$

b) La composée de 2 similitudes directes est une similitude directe de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles. Ω étant le centre de S, Ω est invariant par S^2 et avec $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ et $2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ on peut affirmer que S^2 est 1 similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle π et plus precisement 1 homothetie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$. 0,25

c) Le centre, un point et son image par 1 homothétie etant alignés on a avec 0,5
$h(O) = C \Rightarrow \Omega \in (OC)$; $h(B) = J \Rightarrow \Omega \in (BJ)$ et $h(A) = K \Rightarrow \Omega \in (AK)$ Ainsi les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes en Ω.

3° a) Voir figure. b) $u_n = A_n A_{n+1}$

S	
Ω	Ω
A_n	A_{n+1}
A_{n-1}	A_n

S est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui transforme $[A_{n-1}A_n]$ en $[A_n A_{n+1}]$ donc

$$u_n = A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_{n-1} A_n = \frac{\sqrt{2}}{2} u_{n-1}$$

d'où $u_n = \frac{\sqrt{2}}{2} u_{n-1}$ 0,25

La suite $(u_n)_n$ est une suite geometrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $u_0 = AI = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 0,25

et $u_n = u_0 q^n = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. 0,25

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_n = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$S_n = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$ 0,25

$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ $\lim \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ et

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(2 + \sqrt{2}\right)}$ 0,25

Problème $f_d(x) = 1+\ln(1+dx)$

Partie A. 1-)

si $d>0$ $D_{f_d} =]-\frac{1}{d}; +\infty[$ 0,25

si $d<0$ $D_{f_d} =]-\infty; -\frac{1}{d}[$ 0,25

2° a) Soit $M(x,y)$ on a :

$M(x,y)\in(C_{-d}) \iff x\in D_{f_{-d}}$ et $y=f_{-d}(x)$

$\iff x\in D_{f_{-d}}$ et $y=1+\ln(1-dx)$

$\iff x\in D_{f_{-d}}$ et $y=1+\ln(1+d(-x))$

$\iff -x\in D_{f_d}$ et $y=f_d(-x)$ 0,5

$\iff M'(-x;y)\in(C_d)$ Ainsi (C_d) et (C_{-d}) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$.

b) (Γ) est la courbe d'équation $y=\ln x$

on suppose $d>0$ posons $g(x)=\ln x$ on a :

$f_d(x) = 1+\ln(1+dx) = 1+\ln d(\frac{1}{d} + x)$

$= 1+\ln d + \ln(\frac{1}{d} + x)$ donc

$f_d(x) = g(x+\frac{1}{d})+1+\ln d$ 0,5

$f_d(x) = g[(x-(-\frac{1}{d}))] + 1+\ln d$

$f_d(x) = g(x-a)+b$ avec $\begin{cases} a=-\frac{1}{d} \\ b=1+\ln d \end{cases}$

Ainsi (C_d) est l'image de (Γ) par la translation de vecteur $\vec{u}(-\frac{1}{d}; 1+\ln d)$.

3° on pose $\varphi_d(x) = f_d(x) - x$

a) on suppose $d<0$.

la fonction $x\mapsto 1+dx$ est derivable et strictement positive sur $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ donc $x\mapsto 1+\ln(1+dx)$ est derivable sur $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ par suite φ_d $x\mapsto f_d(x)-x$ est derivable sur $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ et $\forall x<-\frac{1}{d}$

$\varphi_d'(x) = f_d'(x) - 1 = \frac{1}{1+dx}(d-1-dx)$ 0,25

$1+dx>0$ sur $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ donc $\varphi_d'(x)$ est de signe de $d-1-dx$ avec $x<-\frac{1}{d}$

$x<-\frac{1}{d}$ et $d<0 \Rightarrow -dx<1$ car $-d>0$ 0,25

$\Rightarrow -1-dx<0 \Rightarrow d-1-dx<d<0$

donc sur $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ $\varphi_d'<0$ et φ est ↘.

$\lim_{x\to-\infty}\varphi_d(x) = +\infty$ car $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} 1+dx = +\infty, d<0 \\ \text{et} \\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ $\lim -x = +\infty$ 0,25

$\lim_{x\to -\frac{1}{d}^{<}}\varphi_d(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\frac{1}{d}^{<}} 1+dx = 0^+$ et $\lim_{x\to 0^{>}}\ln x = -\infty$ 0,25

Tableau de variation sur $]-\infty;-\frac{1}{d}[$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{d}$
$\varphi_d'(x)$		$-$	‖
$\varphi_d(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

0,25

φ_d est derivable et strict ↘ sur $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ donc φ_d est une bijection de $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ sur IR or $0\in IR$ donc l'equation $\varphi_d(x)=0$ admet 1 sol. unique α_1 0,25 dans $]-\infty;-\frac{1}{d}[$ or $\varphi_d(x)=0 \iff f_d(x)=x$ et (C_d) et (D) ont 1 seul point commun si $d<0$.

b) on suppose $d>0$ $D_{\varphi_d} =]-\frac{1}{d};+\infty[$.

φ_d est derivable sur $]-\frac{1}{d};+\infty[$ et $\varphi_d'(x) = \frac{1}{1+dx}(d-1-dx)$ qui est de signe de $d-1-dx$ car $1+dx>0$

$d-1-dx\geq 0 \iff d-1\geq dx \iff \frac{d-1}{d}\geq x \iff 1-\frac{1}{d}\geq x$

x	$-\frac{1}{d}$		$1-\frac{1}{d}$		$+\infty$
$\varphi_d'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

0,25

sur $]-\frac{1}{d}; 1-\frac{1}{d}[$ φ_d ↗

sur $]1-\frac{1}{d};+\infty[$ φ_d ↘ 0,25

$\lim_{x\to-\frac{1}{d}^{>}}\varphi_d(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\frac{1}{d}^{>}} 1+dx = 0^+$ et $\lim_{0^+}\ln x = -\infty$ 0,25

$\lim_{x\to-\frac{1}{d}} -x = \frac{1}{d}$

$\lim_{x\to+\infty}\varphi_d(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+\ln(1+dx) - x$

$= \lim_{x\to+\infty} 1 + (1+dx)\underbrace{\left[\frac{\ln(1+dx)}{1+dx} - \frac{x}{1+dx}\right]}$ ($\frac{\ln(1+dx)}{1+dx}\to 0$, $\frac{x}{1+dx}\to\frac{1}{d}$)

$= -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} 1+dx = +\infty$ et $[\ldots]\to -\frac{1}{d}<0$ 0,25

Tableau de variation de φ_d, $d>0$

x	$-\frac{1}{d}$		$1-\frac{1}{d}$		$+\infty$
$\varphi_d'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$\varphi_d(x)$	|| $-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$

0,25

avec $M=\varphi_d(1-\frac{1}{d}) = 1+\ln(1+d(1-\frac{1}{d}))-1+\frac{1}{d}$

$= 1+\ln d-1+\frac{1}{d} = \frac{1}{d}+\ln d$

pour $d>0$ φ_d est ↗ sur $]-\frac{1}{d};1-\frac{1}{d}[$ et φ_d est ↘ $]1-\frac{1}{d};+\infty[$ donc $m(d)=\frac{1}{d}+\ln d$ est le maximum de φ_d sur D_{φ_d} atteint en $1-\frac{1}{d}$.

c) Variation de $m(d)=\frac{1}{d}+\ln d$ avec $d\in]0;+\infty[$.

m est derivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall d>0$

$m'(d) = -\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d} = \frac{-1+d}{d^2}$ 0,25

$d^2>0$ et $m'(d)$ est de signe de $d-1$

sur $]0;1[$ m est ↘ est sur $]1;+\infty[$ m est ↗.

0,25

d	0		1		$+\infty$
$m'(d)$		$-$	0	$+$	
$m(d)$		↘	1	↗	

1 est le minimum de m sur $]0;+\infty[$ atteint en 1 or $1>0$ donc $\forall d\in]0;+\infty[$ $m(d)>0$. 0,25

d) $m(d)>0$. φ_d derivable et st ↗ sur $]-\frac{1}{d};1-\frac{1}{d}[$ et φ_d derivable et st ↘ sur $]1-\frac{1}{d};+\infty[$ donc φ_d realise une bijection de $]-\frac{1}{d};1-\frac{1}{d}[$ sur $]-\infty;m(d)[$ et de $]1-\frac{1}{d};+\infty[$ sur $]-\infty;m(d)[$.

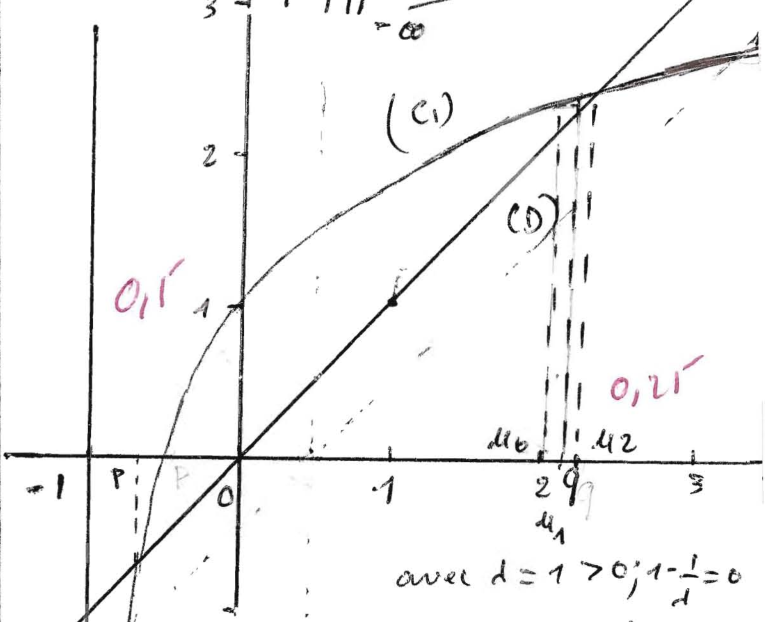
0,5 or $0\in]-\infty;m(d)[$ donc l'equat° $\varphi_d(x)=0$ admet une solution unique sur chacun des intervalles $]-\frac{1}{d};1-\frac{1}{d}[$ et $]1-\frac{1}{d};+\infty[$ et α_1 et α_3 ces deux solutions, ainsi (C_d) et (C) ont deux points communs d'abscisses α_1 et α_3 si $d>0$.

B 1° a) $d=1$ $\quad f_1(x)=1+\ln(1+x)$

$D_{f_1}=]-1;+\infty[$ et TV de f_1 :

$f_1'(x)=\frac{1}{1+x}$ 0,25

x	-1		$+\infty$
f_1'	||	$+$	
f_1	|| $-\infty$	↗	$+\infty$



avec $d=1>0$; $1-\frac{1}{d}=0$

b) $[2;3]\subset[0;+\infty[$ et

$\varphi_1(2)=0,09>0$,

$\varphi_1(3)=-0,61<0$ 0,25

$\varphi_1(3)<0<\varphi_1(2)$ donc $2<q<3$

2° a) Voir u_0; u_1, u_2 sur fig.

b) Montrons que u est ↗ (0,25) et $u\leq q$. 0,25

• $u_0=2$ et $u_1=f_1(u_0)=f_1(2)=2,08$

On a $u_0\leq u_1$ et P_0 vraie. De plus $2\leq u_0\leq u_1\leq 3$

supposons $2\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 3$ pour 1 n donné et Montrons que

$2\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 3$. f_1 est ↗ sur $]-1;+\infty[$ donc sur $[2;3]$ donc

$2\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 3 \Rightarrow f_1(2)\leq f_1(u_n)\leq f_1(u_{n+1})\leq f_1(3)$ or $f_1(2)\simeq 2,08>2$

$f_1(3)\simeq 2,38\leq 3$; $f_1(u_n)=u_{n+1}$ et $f_1(u_{n+1})=u_{n+2}$ Ainsi on a

$2\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 3$ d'où

u est croissante et $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\in[2;3]$.

• Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\leq q$

$u_0=2$ et $q\in[2;3]$ donc $u_0\leq q$

P_0 vraie.

• Supposons $u_n \leq q$ et Mq $u_{n+1} \leq q$

f_1 est croissante et $f_1(q) = q$ donc

$u_n \leq q \Rightarrow f_1(u_n) \leq f_1(q)$ or

$u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $f_1(q) = q$ donc

$u_{n+1} \leq q$ et P_{n+1} vraie d'où

u est majorée par q.

$\underline{Rq}$ la suite u est croissante et majorée par q donc u converge.

c) Montrons d'abord que $\forall x \in [2;3]$

$|f_1'(x)| \leq \frac{1}{3}$. 0,25

$f_1'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $|f_1'(x)| = \frac{1}{1+x}$ car $\frac{1}{1+x} > 0$

$2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3 \leq 1+x \leq 4 \Rightarrow$

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow |f_1'(x)| \leq \frac{1}{3}$ $\forall x \in [2;3]$.

f_1 est derivable sur $[2;3]$ et $|f_1'(x)| \leq \frac{1}{3}$

$\forall x \in [2;3]$, en appliquant l'IAF 0,25

à q et $u_n \in [2;3]$ on a :

$$|f_1(u_n) - f_1(q)| \leq \frac{1}{3}|u_n - q|$$

or $f_1(u_n) = u_{n+1}$ et $f_1(q) = q$ donc

$|u_{n+1} - q| \leq \frac{1}{3}|u_n - q|$ $\forall n$

avec $u_{n+1} \leq q$ et $u_n \leq q$ $\forall n$

$|u_{n+1} - q| = q - u_{n+1}$ et $|u_n - q| = q - u_n$

d'où $\boxed{q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n) \quad \forall n}$ 0,25

d) $0 < q - u_n \leq \frac{1}{3}(q - u_{n-1})$

$0 < q - u_{n-1} \leq \frac{1}{3}(q - u_{n-2})$

$\vdots$

$0 < q - u_1 \leq \frac{1}{3}(q - u_0)$

Tous les termes etant strictement positif
Par produit membre à membre et

après simplification on a :

$q - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (q - u_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ 0,25

avec $2 \leq q \leq 3$ on a $0 \leq q - u_0 \leq 3 - 2$

$0 \leq q - u_0 \leq 1$

Ainsi $q - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ 0,25

$0 < \frac{1}{3} < 1$ $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim u_n = q$ 0,25

Par suite la suite $(u_n)_n$ converge vers q.

e) Il suffit de trouver n_0 tq $\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} \leq 10^{-2}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} \leq 10^{-2} \Rightarrow n_0 \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq \ln 10^{-2}$

$\Rightarrow n_0 \geq \frac{\ln 10^{-2}}{\ln \frac{1}{3}} \Rightarrow n_0 \geq 4,19$

on peut prendre $n_0 = 5$ et 0,25

$u_5 \simeq 2,15$ 0,25 est une valeur approchée de q à 10^{-2} près.

e) $f(t) = \frac{1}{1+t}$ $f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} < 0$ et $f \searrow$ 0,25

$x_{i-1} \leq t \leq x_i \Rightarrow f(x_i) \leq f(t) \leq f(x_{i-1})$ 0,25

d'après Inég. de la moy $\frac{1}{n} f(x_i) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f(x_{i-1})$

donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \leq I \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i+n} \leq I \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n+i-1}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} \leq I \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i-1+n}$ 0,25

$\boxed{u_n - \frac{1}{n} \leq I \leq u_n - \frac{1}{2n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$I \leq u_n - \frac{1}{2n} \Rightarrow I + \frac{1}{2n} \leq u_n$ (1)

$u_n - \frac{1}{n} \leq I \Rightarrow u_n \leq I + \frac{1}{n}$ (2).

donc $I + \frac{1}{2n} \leq u_n \leq I + \frac{1}{n}$ 0,25

$\lim \frac{1}{2n} = 0$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$ d'où

$\lim_{n\to+\infty} u_n = I = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln 2$ 0,25

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2}$ 0,25