LJAA DEVOIR DE MATHS N° 6 Durée 4 Heures
TC

EXERCICE I (5 points) 5

Dans le plan on considère on considère un triangle ABC. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [BA]. On pose BC = a, AC = b et AB = c.

1°) a) Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ 0,5

b) Démontrer que : $4\,\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} - 2BC^2$ 0,5

c) En déduire que les droites (BB') et (CC') sont perpendiculaires si et seulement si la relation (1) : $b^2 + c^2 = 5a^2$ est vérifiée. 0,5

d) Démontrer que si les médianes (BB') et (CC') sont perpendiculaires, alors $AA' = \frac{3}{2}a$. 0,5

2°) Dans cette question on suppose satisfaite la relation (1) : $b^2 + c^2 = 5a^2$.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$. 0,75

b) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que :
$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2$; puis vérifier que A appartient à (F). 0,75+0,25

3°) Application

a) On donne a = 6 cm ; b = 9 cm et $c = 3\sqrt{11}$ cm. 0,75
Vérifier que la relation (1) est satisfaite ; puis en déduire la construction d'un triangle ABC répondant à ces données. Expliquer la construction.

b) Représenter dans ce cas les ensembles (E) et (F). 0,25+0,25

EXERCICE I (4 points) 4

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n étant un entier supérieur ou égal à 1).
U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1°) On considère l'événement A: « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune avec leur configuration de départ ».

a) Montrer que la probabilité de l'événement A peut s'écrire $p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$. 0,5

b) Déterminer la limite de p(A) quand n tend vers + ∞. 0,25

2°) On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
Vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrire $p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$. 0,5

3°) Un joueur mise 20 francs et effectue l'épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 :

- si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs;
- si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs;
- si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10. 0,25 Dans la suite, on considérera n > 10 et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, X = 2 n - 20).

b) Déterminer la loi de probabilité de X. 1

c) Calculer l'espérance mathématique de X. 0,5

d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches. 1

6,25

PROBLEME (10 points)

Le problème a pour objet l'étude d'une suite de fonctions, d'une suite d'intégrales, puis la recherche d'une valeur approchée d'une équation du type f(x) = k.

Partie A: étude d'une suite de fonctions 4,5

On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $]-\infty, -2[\,\cup\,]-2, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour n entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, i , j) (unité 2 cm).

1°) a) Etudier les limites de f_n en - ∞ et en + ∞ (pour la limite en + ∞, on posera X = x + 2). 0,5

b) Etudier suivant la parité de n, la limite de f_n en -2. 0,5

2°) a) Calculer $f'_n(x)$, puis étudier son signe suivant la parité de n. 0,75

b) Dresser le tableau de variation de f_n. 0,5

3°) a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A. 0,25

b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A. 0,25

4°) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat. 0,5

b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout réel x différent de - 2, on a : $f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$. 0,25

c) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2). 0,25
Représenter graphiquement (C_1) et (C_2). 0,25 + 0,25

Partie B : étude d'une suite d'intégrales. 2,25

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$, pour tout entier naturel n non nul.

1°) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout n non nul on a : $u_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ? 0,25 0,25 +0,25

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \frac{1-2^{-n+1}}{n-1}e$. En déduire la limite de la suite (u_n). 0,25+0,25

3°) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $n\,u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{e}{2^n}$. 0,5

b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4°) b) de la partie A. 0,25

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}dx = 1$. 0,25

Partie C : recherche de la solution positive de l'équation g(x) = e.

On considère la fonction g définie sur [0 , + ∞ [par : $g(x) = f_1(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, i , j).

1°) Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe (C_1). Justifier la construction. 0,25 + 0,25

2°) On appelle Φ la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par:
$\Phi(x) = 1 + \ln(1 + x)$

a) Démontrer que l'équation Φ(x) = x admet une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3]. 0,5

b) Démontrer que pour x positif, l'équation Φ (x) = x est équivalente à l'équation g(x) = e. 0,25

c) Démontrer que pour tout x de I, $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{3}$. 0,25

3°) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par . $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = \Phi(V_n)$.

a) Démontrer que la suite (V_n) est croissante et majorée par α. 0,5 Conclure. 0,25

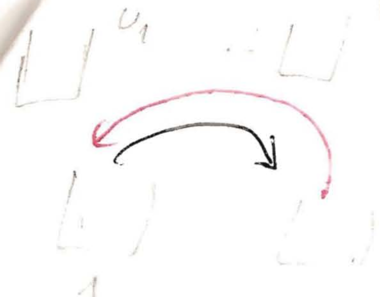
b) Démontrer que Φ (I) ⊂ I. 0,25

c) Démontrer par récurrence, que pour tout n, V_n appartient à l'intervalle I. 0,25

4°) a) Prouver que pour tout n, on a $|V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|V_n - \alpha|$, puis que $\alpha - V_{n+1} \leq \frac{1}{3}(\alpha - V_n)$. 0,5+0,25

b) En déduire que, pour tout n : $\alpha - V_n \leq \frac{1}{3^n}$ et que la suite (V_n) converge vers α. 0,25 0,25

c) Déterminer un entier p pour lequel V_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer cette valeur approchée. 0,25+ 0,25



$n+3$ $\quad$ 3

II $\quad U_1$ = n b blanches et 3 boul n
U_2 = 2 b blanch et 1 boul n.

(4

1) a) $P(A) = \frac{2}{4}\,\frac{n+2}{n+3}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A) = \frac{3}{4}$ car $\lim \frac{n+2}{n+3} = 1$

2) $P(B) = \frac{3 \times 2}{4(n+3)} = \frac{6}{4(n+3)} = \frac{3}{2(n+3)}$

3) a) $2n \geq 20$ donc $n \geq 10$.

b) $X(\Omega) = \{2n-20 \,;\, n-20 \,;\, -20\}$

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$p(X=x_i)$	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3}{4}\,\frac{n+2}{n+3}$	$\frac{n}{4(n+3)}$

Card $\Omega = (n+3)4$

Card $A = n \times 3 + 3 \times 2$
$= 3(n+2)$

Card $B = 3 \times 2$

Card $C = n \times 1$

$$E(X) = \frac{2(n-10)\,6}{4(n+3)} + \frac{3(n-20)(n+2)}{4(n+3)} - \frac{20n}{4(n+3)}$$

$$E(X) = \frac{12n - 120 + 3(n^2 - 18n - 40) - 20n}{4(n+3)}$$

$$= \frac{12n - 120 + 3n^2 - 54n - 120 - 20n}{4(n+3)} = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)}$$

$E(X) > 0$ si $3n^2 - 62n - 240 > 0$ $\qquad \Delta = 6724$ et $\sqrt{\Delta} = 82$

$n_1 = \frac{62-82}{6}$ $\qquad n_2 = \frac{62+82}{6} = \frac{144}{6} = 24$

$n_1 = -10$

24	
0	+

$E(X) = 3(n+10)(n-24)$

Pour $n = 24$ on a $E(X) = 0$ $\qquad n \in \mathbb{N}^*$

et $E(X) > 0$ pour $n \geq 25$

U_1 doit contenir au moins 25 boules blanches

Pb — Problème

$f_n(x) = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ $\qquad D_{f_n} =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$.

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1+x} = 0 \text{ car } \lim\limits_{x \to -\infty} 1+x = -\infty \\ \lim (x+2)^n = +\infty \text{ si } n \text{ pair}, \; -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x+2)^n} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$

posons $X = x+2$ $\quad x \to +\infty \quad X \to +\infty$ et $x = X-2$

$f_n(x) = \dfrac{e^{X-1}}{X^n} = e^{-1} \dfrac{e^X}{X^n}$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{-2} f_n$

si n pair

x		-2	
$(x+2)^n$	$+$	0	$+$

si n impair

x		-2	
$(x+2)^n$	$-$	0	$+$

__Si n pair__

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2} e^{1+x} = e^{-1} > 0 \\ \lim\limits_{x \to -2} (\cancel{x+2})^n = 0^+ \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to -2} f_n(x) = +\infty$.

__Si n impair__

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2} e^{1+x} = e^{-1} > 0 \\ \lim (x+2)^n = 0^- \\ x \to -2^- \end{cases}$ $\qquad \lim f_n(x) = -\infty$

$\begin{cases} \lim e^{1+x} = e^{-1} > 0 \\ \lim (x+2)^n = 0^+ \\ x \to -2^+ \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2^+} f_n(x) = +\infty$

$n \geq 1$

2) a- f_n est déri sur D_{f_n} et $f_n'(x) = \dfrac{e^{1+x}(x+2)^n - n(x+2)^{n-1} e^{1+x}}{(x+2)^{2n}}$

$f_n'(x) = \dfrac{e^{1+x}(x+2)^{n-1}}{(x+2)^{2n}} (x+2-n) = \dfrac{e^{1+x}(x+2-n)}{(x+2)^{n+1}}$

$f_n'(x) = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} (x+2-n)$

$f_n'(x)$ est de sig de $\dfrac{x+2-n}{x+2}$

__Si n paire__ $n+1$ impair et

x		-2		$n-2$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x+2-n$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	‖	$-$	0	$+$

Si n impair. $n+1$ pair

x		-2		$n-2$	
$f_n'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$

le TV de f_n est : si n pair

x	$-\infty$		-2		$n-2$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \; \|\|$	$\searrow$	$f_n(n-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si n impair, n+1 est pair et

$(n+2)^{n+1} > 0$ et f'_n est du sig de $x+2-n$

x	$-\infty$		-2		$n-2$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \; \|\| \; +\infty$	$\searrow$	$f_n(n-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ ssi $\dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n} = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} \Leftrightarrow (x+2)e^{1+x} = e^{1+x}$

$\Leftrightarrow (x+2)e^{1+x} - e^{1+x} = 0$ ssi $(x+1)e^{1+x} = 0$ ssi $x = -1$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(-1) = \dfrac{e^0}{1^n} = 1$ donc toutes les courbes (C_n) passent par $A(-1;1)$.

b) Tangente $A(-1;1)$ $\quad y = f'_m(-1)(x-1) + f_n(1)$

$f'_n(-1) = \dfrac{e^0(-1+2-n)}{(-1+2)^{n+1}} = (1-n) \qquad f_n(1) = 1$

(T_n) $\boxed{y = (1-n)(x+1) + 1 = (1-n)x + 1-n+1 = (1-n)x+2-n}$

4) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{1+x}}{x(x+2)^n}$ $\quad$ posant $x+2 = X$

$x = X-2$

$x \to +\infty \qquad X \to +\infty$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^{X-1}}{(X-2)X^n} = \lim \dfrac{e^{-1}}{X-2}\left(\dfrac{e^X}{X^n}\right)$

$= \lim \dfrac{e^X \cdot e^{-1}}{X^{n+1} - 2X^n} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X \cdot e^{-1}}{X^{n+1}(1-\frac{2}{X})} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^{n+1}} \times \dfrac{e^{-1}}{1-\frac{2}{X}} = +\infty$

donc (C_n) admet une branche paraboliq de direction l'axe (oy)

$x \neq -2$ Mq $f_n'(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

$n f_{n+1}(x) + f_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x) = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n} - n \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}$

$= \dfrac{(x+2)e^{1+x} - n e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} = \dfrac{e^{1+x}(x+2-n)}{(x+2)^{n+1}} = f_n'(x)$

donc $\boxed{f_n'(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)}$

i) $f_1'(x) = f_1(x) - f_2(x)$

	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
		$-$	||	$-$	0	$+$	
		$(C_1)/C_2$	||	$(C_1)(C_2)$		C	

sur $]-\infty;-2[\cup]-2;-1]$ $f_1(x) < f_2(x)$: (C_1) en dessous de (C_2)

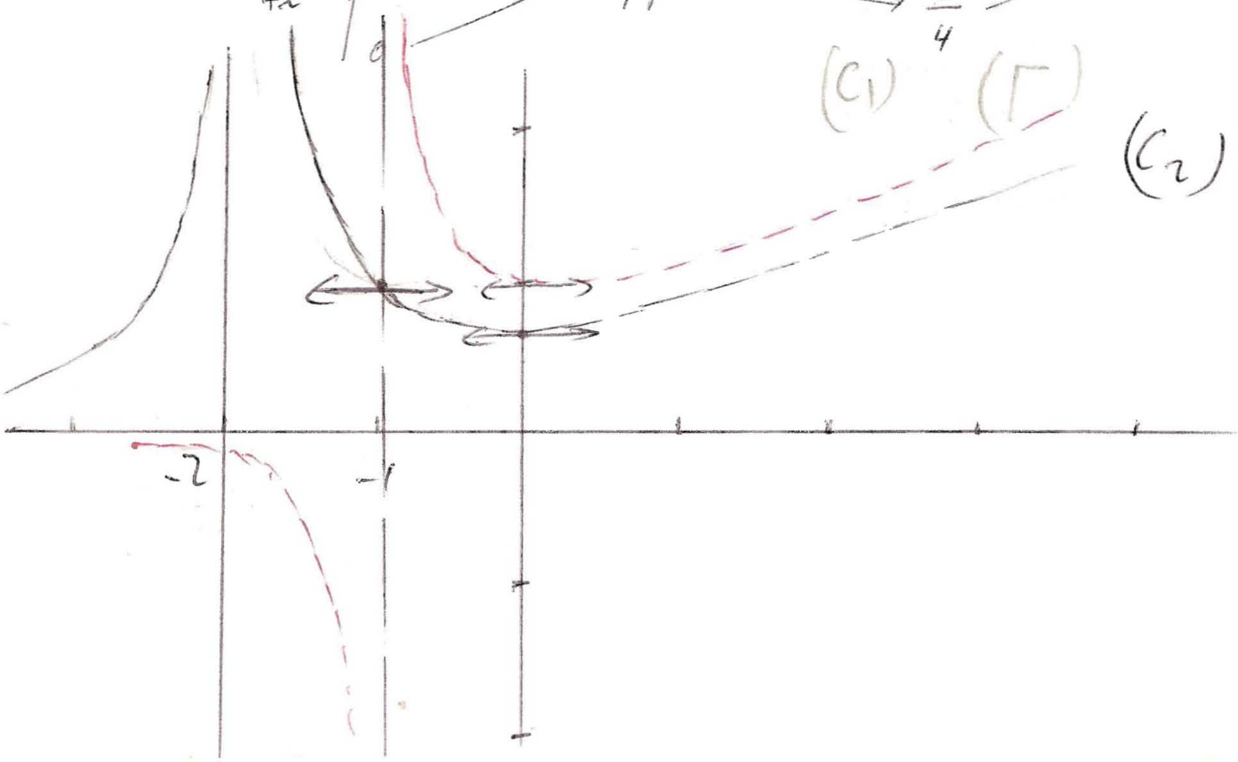
sur $[-1;+\infty[$ $f_1' > 0$ et $f_1(x) > 2f_2(x) > f_2(x)$ et (C_1) au dessus de (C_2).

(C_1) $y = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f_1'		$-$	||	$-$	0	$+$	
f_1	0	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(C_2) $y = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f_2'		$+$	||	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$ $+\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{e}{4}$	$\nearrow$	



- $u_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$. 1) Mq $u_n \searrow$ (8

$$u_{n+1} - u_n = \int_{-1}^{0} \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left[\frac{e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} - \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}\left[\frac{1}{x+2} - 1\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}\left[\frac{-x-1}{x+2}\right] dx$$

$\frac{e^{1+x}}{(x+2)^n} > 0$

$-1 \leq x \leq 0$

$0 \leq -x \leq 1$

$-1 \leq -x-1 \leq 0$.

$1 \leq x+2 \leq 2$

$-x-1 < 0$

$x+2 > 0$

≤ 0 car

donc $u_{n+1} \leq u_n$ et $(u_n) \searrow$

$f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n} > 0$ car $e^{1+x} > 0$ et $(x+2) > 0$ $(x+2)^n > 0$

$\int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx \geq 0$ et $u_n > 0$

la suite $(u_n) \searrow$ et minorée de elle CV.

2) $-1 \leq x \leq 0$

$0 \leq 1+x \leq 1$

$1 \leq e^{1+x} \leq e$

$$\frac{1}{(x+2)^n} \leq \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n} \leq \frac{e}{(x+2)^n}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+2)^n} \leq u_n \leq e\int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+2)^n}\,dx$$

$$\left[\frac{(x+2)^{-n+1}}{-n+1}\right]_{-1}^{0} \leq u_n \leq e\left[\frac{(x+2)}{-n+1}\right]_{-1}^{0}$$

$$\frac{2^{-n+1}-1}{-n+1} \leq u_n \leq \frac{2^{-n+1}-1}{-n+1}\,e$$

$$\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \frac{1-2^{-n+1}}{\cancel{n-1}}\,e$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{-n+1} = \lim_{n\to+\infty} 2\times 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} 2\times\frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

$$\lim \frac{1-2^{-n+1}}{n-1} = 0 = \lim \frac{1-2^{-n+1}}{\cancel{n-1}}$$

donc $\lim u_n = 0$.

(9

1) . $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}\,dx$ $\quad u = \frac{1}{(x+2)^n} \quad u' = -\frac{n}{(x+2)^{n+1}}$

$v' = e^{1+x} \quad v = e^{1+x}$

$$u_n = \left[\frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}\right]_{-1}^{0} + n \int_{-1}^{0} \frac{e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}\,dx$$

$u_n = \frac{e}{2^n} - 1 + n\,u_{n+1}$ donc $\boxed{n\,u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{e}{2^n}}$

b) $f_n'(x) = f_n(x) - n\,f_{n+1}(x)$ donc $\int f'\,dx = u_n - n\,u_{n+1}$

$$\left[f_n(x)\right]_{-1}^{0} = u_n - n\,u_{n+1}$$

$\frac{e}{2^n} - 1 = u_n - n\,u_{n+1}$ donc $\boxed{n\,u_{n+1} = u_n + 1 - \frac{e}{2^n}}$

c) $\lim u_n = 0$ et $\lim \frac{e}{2^n} = 0$ donc $\lim n\,u_{n+1} = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-1}^{0} \frac{n\,e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}\,dx = 1$

$\boxed{C}$ $[0 ; +\infty[$ $g(x) = f_1(x-1)$.

1°) (Γ) est l'image de (C_1) par la translat de vecteur $\vec{u}\binom{1}{0}$

2°) $\phi(x) = 1 + \ln(1+x)$

a) Soit $h(x) = \phi(x) - x = 1 + \ln(1+x) - x$, $x \in [0 ; +\infty[$

h est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0$

x	0	$+\infty$
h'	$-$	
h	1	$\searrow -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim (1+x)\left[\frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right] = -\infty$

$h(x) = 0$ ssi $\phi(x) = x$ h dérivable et strictement $\searrow$ sur $[0 ; +\infty[$ donc h est 1 bij de $[0 ; +\infty[$ sur $]-\infty ; 1]$ or $0 \in]-\infty ; 1]$ donc l'éq $h(x) = 0$ admet une sol uniq α Ainsi l'éq $\phi(x) = x$ admet une solu uniq α. De plus $h(2) \times h(3) < 0$ donc

$\boxed{2 < \alpha < 3}$ $\quad h(2) \simeq 0{,}09$

$h(3) \simeq -0{,}61$

Mq $x \geq 0$ $\phi(x) = x$ ssi $g(x) = e$ (10

$\phi(x) = x$ ssi $\ln(1+x) + 1 = x$ ssi $\ln(1+x) = x - 1$

ssi $1 + x = e^{x-1} = e^{x} \times e^{-1}$

ssi $\frac{e^{x}}{1+x} = e$

ssi $g(x) = e$

$\phi(x) = x$ ssi $g(x) = e$

$\phi'(x) = \frac{1}{1+x}$

c) Mq $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{3}$ $\forall x \in I = [2 ; 3]$.

$2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3 \leq 1 + x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} \leq \phi'(x) \leq \frac{1}{3}$ donc $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

3°) $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \phi(V_n) \end{cases}$ $\phi(x) = 1 + \ln(1+x)$

- $n = 1$ on a $V_1 = 1 + \ln 3 > 2$ donc $V_0 < V_1$ et P_1 vraie
- supposons $V_n \leq V_{n+1}$ et Mq $V_{n+1} \leq V_{n+2}$

$V_n \leq V_{n+1} \Rightarrow 1 + V_n \leq 1 + V_{n+1}$

$\Rightarrow \ln(1+V_n) \leq \ln(1+V_{n+1})$ car $x \mapsto \ln x \nearrow$

$\Rightarrow 1 + \ln(1+V_n) \leq 1 + \ln(1+V_{n+1})$

$\Rightarrow V_{n+1} \leq V_{n+2}$ et P_{n+1} vraie

d'où $(V_n) \nearrow$ Mq $V_n \leq \alpha$ pour tout n

- $V_0 = 2$ et $\alpha \in [2 ; 3]$ donc $V_0 \leq \alpha$ et P_0 vraie
- Supposons $V_n \leq \alpha$ et Mq $V_{n+1} \leq \alpha$.

$\phi'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$ et ϕ str $\nearrow$ sur $[0 ; +\infty[$

$V_n \leq \alpha \Rightarrow \phi(V_n) \leq \phi(\alpha)$

or $\phi(V_n) = V_{n+1}$ et $\phi(\alpha) = \alpha$

donc $V_{n+1} \leq \alpha$ et $\forall n$ $V_n \leq \alpha$

la suite (V_n) est croi et majorée par α donc (V_n) CV

(11)

b) Mq $\phi(I) \subset I$.

$\phi(2) \simeq \quad > 2$

$\phi(3) \simeq \quad < 3$

ϕ est dérivable et str croiss.

$2 \leq x \leq 3 \Rightarrow \phi(2) \leq \phi(x) \leq \phi(3)$

donc $\phi(x) \in [2;3]$.

c) Mq $V_n \in [2;3]$ $\forall n$.

. si $n=0$ on a $V_0 = 2 \in [2;3]$ et P_0 vrai.

. supp $V_n \in [2;3]$ et Mq $V_{n+1} \in [2;3]$.

si $V_n \in [2;3]$ on a $\phi(V_n) \in [2;3]$ d'après c

or $V_{n+1} = \phi(V_n)$ donc $V_{n+1} \in [2;3]$

et $V_n \in [2;3]$ $\forall n$,

4) a- ϕ est dérivable sur $[2;3]$ et $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{3}$ d'après IAF avec

$u_n \in [2;3]$ et $\alpha \in [2;3]$ on a $|\phi(V_n) - \phi(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|V_n - \alpha|$

or $\phi(V_n) = V_{n+1}$ et $\phi(\alpha) = \alpha$ donc $|V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|V_n - \alpha|$.

$V_n < \alpha$ donc $|V_n - \alpha| = \alpha - V_n$ et $|V_{n+1} - \alpha| = \alpha - V_{n+1}$

d'où $\boxed{\alpha - V_{n+1} \leq \frac{1}{3}(\alpha - V_n).}$

b) $\alpha - V_n \leq \frac{1}{3}(\alpha - V_{n-1})$

$\vdots$

$\alpha - V_1 \leq \frac{1}{3}(\alpha - V_0)$

toutes termes étant $\oplus$ par $\times^t$ ....

on a $\alpha - V_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (\alpha - V_0)$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-3}$

$n \ln \frac{1}{3} \leq \ln 10^{-3}$

$n \geq \frac{\ln 10^{-3}}{\ln \frac{1}{3}}$

$n \geq 6{,}28$

$2 \leq \alpha \leq 3$

$0 \leq \alpha - V_0 \leq 1$

et $\alpha - V_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim V_n = \alpha}$

$n_0 = 7$ et V_7 est une val. app de α à 10^{-3} près

$V_1 = \phi(2) = 2{,}0986$

$V_2 = \phi(2{,}0986) = 2{,}131$

$V_3 = \phi(2{,}131) \simeq 2{,}1414$

$V_4 = \phi(2{,}1414) \simeq 2{,}1447$

$V_5 = \phi(2{,}1447) \simeq 2{,}1457$

$V_6 = \phi(2{,}1457) \simeq 2{,}146$

$V_7 = \phi(2{,}146) \simeq 2{,}1461$

$V_7 \simeq 2{,}146$ est 1 val. app de α à 10^{-3} près.