

5

Epreuve de Mathématiques

EXERCICE I

4

1. Une machine M_1 est constituée de deux éléments A et B. Un défaut d'un seul élément suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne. Les défauts éventuels des éléments A et B sont deux événements indépendants qui se produisent avec les probabilités respectives $a = 0,1$ et $b = 0,2$.

a. Calculer la probabilité pour que A et B soient hors service en même temps.

b. Calculer la probabilité pour que la machine M_1 soit hors service.

c. Calculer la probabilité pour que la machine M_1 fonctionne.

d. On suppose que la machine M_1 est en panne. Quelle est la probabilité d'avoir un seul élément hors service ?

2. Un appareil est fabriqué par deux machines M_1 et M_2 utilisées en série et dans cet ordre. La machine M_1 peut provoquer deux défauts D_1 et D_2 . Un relevé statistique permet d'estimer que :

• La probabilité qu'un appareil ait le défaut D_1 et lui seul est de 0,04,

• La probabilité qu'il ait le défaut D_2 et lui seul est de 0,02,

• La probabilité qu'il ait les deux défauts est de 0,01.

À la sortie de M_1 les appareils en cours de fabrication passent par M_2 qui peut provoquer un défaut D_3 dans les conditions suivantes : la probabilité pour que M_2 produise le défaut D_3 est de 0,6 pour les appareils ayant déjà un ou deux défauts en sortant de M_1 et elle est de 0,03 pour les appareils sans défaut à la sortie de M_1 .

a. Calculer les probabilités d'avoir à intervenir sur le défaut D_1 . Calculer la probabilité d'avoir à intervenir sur le défaut D_2 . Calculer la probabilité d'avoir à intervenir sur le défaut D_3 .

b. Quelle est la probabilité qu'un appareil fabriqué soit sans défaut ?

c. Quelle est la probabilité qu'un appareil fabriqué ait un et un seul défaut ?

Soit, dans le plan orienté, un triangle (A, B, C) équilatéral direct de centre O. On pose $AB = d$ ($d > 0$).

1. a) Démontrer que l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} d^2$ est une droite que l'on déterminera avec précision.

b) Déterminer le réel k afin que l'ensemble (δ) des points du plan tels que $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} = k$ passe par le milieu du segment [BC].

c) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2d^2$ est un cercle que l'on déterminera avec précision.

d) Justifier que (Δ) est tangente à (Γ).

2. À tout point M du plan on associe le point M' défini par :

$$M' = S_{(AC)} \circ S_{(AO)}(M)$$

où $S_{(AO)}$ et $S_{(AC)}$ désignent les symétries orthogonales par rapport aux droites (AO) et (AC).

a) Démontrer que M' est l'image de M par une rotation r dont on donnera les éléments caractéristiques.

b) Quelle est l'image, par r , de la droite (BC) ?

c) Démontrer que $O' = r(O)$ est un point de (Γ).

3. À tout point M de la droite (BC) on associe le point M'' intersection de la droite (AM') et de (δ). M' est le point défini en 2.

a) Démontrer que M'' est l'image de M par une similitude s dont on précisera les éléments caractéristiques.

b) Construire l'image (Γ'') de (Γ) par s .

4. Soit N un point de (Γ') distinct de A et de O'. La droite (NO') coupe (Γ'') en Q.

a) Démontrer que $((AN), (AQ)) = ((OA), (AO'))$.

b) Déterminer $s(N)$.

PROBLEME

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère ortho-normal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique : 10 cm).

On considère en outre la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

PARTIE I

Étude de la fonction f_n

1. On suppose $n = 0$.

- a) Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$. 0,25 + 0,25
 b) Étudier le sens de variation de f_0 puis dresser son tableau de variation. 0,75

c) Montrer que le point $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_0$. 0,25

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_0$ en précisant sa tangente en I . 0,75

2. On suppose $n \geq 1$.

- a) Étudier les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$. 0,25 + 0,25
 b) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que, pour tout x , on a :

$$f'_n(x) = \frac{-e^{-nx}[n + (n+1)e^x]}{(e^x + 1)^2}. \quad 0,25$$

c) Étudier le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation. 0,75

d) Vérifier que le point I appartient à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$. 0,25

e) Tracer $\mathcal{C}_1$ dans le même repère que $\mathcal{C}_0$, en précisant sa tangente en I . 0,75

PARTIE II

Étude de la suite (u_n)

Dans cette partie, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1. Étude d'une suite auxiliaire (v_n)

Pour tout n , on pose $v_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$.

a) Calculer v_n . 0,5

b) Déterminer $\lim v_n$, puis $\lim (nv_n)$. 0,5

2. Comparaison de (u_n) à (v_n)

a) Établir que, pour tout x appartenant à $[0; 1]$, on a : $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$. 0,5

b) En déduire que, pour tout n , on a : $\frac{1}{2}v_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}v_n$. 0,5

c) Déterminer $\lim u_n$, puis $\lim nu_n$. 0,5

3. Étude d'une suite associée à (u_n)

On pose : $s_n = \sum_{p=1}^n u_p$ et $t_n = \sum_{p=1}^n v_p$.

a) Montrer que : $0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$. 0,75

(on observera que, pour tout p , on a : $\frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$).

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[p; p+1]$, montrer qu'on a : $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$. 0,75

c) En déduire que, pour tout n , on a : $\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$. 0,5

d) Montrer, en utilisant a) et c) que $\lim t_n = +\infty$, puis déterminer $\lim \frac{t_n}{\ln(n)}$. 0,75

e) Que peut-on en déduire pour s_n ? 0,5

EXERCICE 1

1° notons A "l'elt A présente 1 défaut"
 B "l'elt B présente 1 défaut".

a) A et B étant indépendants par hypothèse
 la probabilité pour que A et B soient
 défectueux en même temps :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$$

b) Notons $\bar{M}_1$ "la machine M_1 est hors service"

$$P(\bar{M}_1) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{M}_1) = 0,1 + 0,2 - 0,02 = 0,28$$

c) Notons M_1 "la machine M_1 fonctionne"

$$P(M_1) = 1 - P(\bar{M}_1) = 1 - 0,28 = 0,72$$

d) On suppose M_1 est en panne. Déterminons
 la probabilité d'avoir $E = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
 Sachant $\bar{M}_1$ c'est à dire $P(E/\bar{M}_1)$.

Avec $P(\bar{M}_1) = 0,28 \neq 0$ on a

$$P(E/\bar{M}_1) = \frac{P(E \cap \bar{M}_1)}{P(\bar{M}_1)}$$

remarquons que $E \subset \bar{M}_1$ car si un
 seul des elts A ou B est en panne, M_1
 ne fonctionne pas. Ainsi $E \cap \bar{M}_1 = E$

$$\begin{aligned} P(E \cap \bar{M}_1) &= P(E) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) \\ &= 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,2 \\ &= 0,26 \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$P(E/\bar{M}_1) = \frac{0,26}{0,28} = \frac{26}{28} = \frac{13}{14}$$

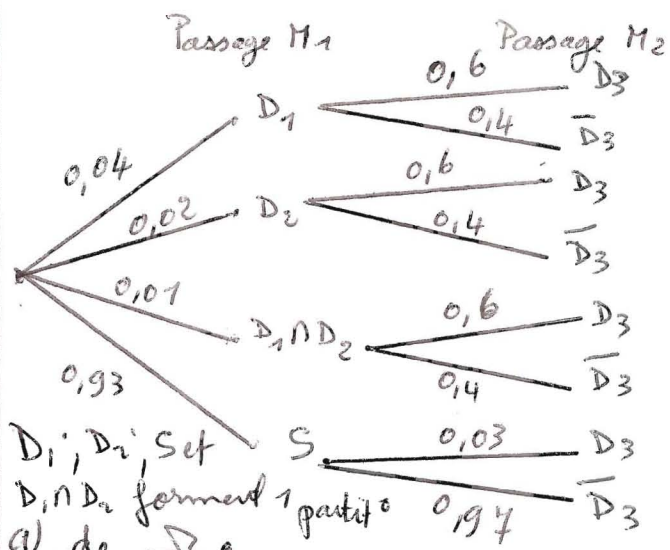
2° notons

D_i l'appareil présente le défaut D_i seul

S l'appareil est sans défaut.

Faisons l'arbre de probabilité
 associé à cette situation.

$$P(S) = 1 - P(D_1) - P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,93$$



Notons F_i l'événement "intervenu sur le défaut D_i "

$$P(F_1) = 0,04 + 0,01 = 0,05$$

$$P(F_2) = 0,02 + 0,01 = 0,03$$

$$P(F_3) = 0,04 \times 0,6 + 0,02 \times 0,6 + 0,01 \times 0,6 + 0,93 \times 0,03 = 0,0699$$

$$\text{car } F_3 = (D_1 \cap D_3) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_1 \cap D_2 \cap D_3) \cup (S \cap D_3) \text{, ainsi}$$

$P(F_3) = 0,0699$ d'après la formule
 des probabilités totales.

b) Notons F "appareil fabriqué sans défaut"

$$F = S \cap \bar{D}_3 \text{ et } P(F) = 0,93 \times 0,94$$

$$P(F) = 0,9021$$

c) G "appareil ayant 1 défaut et 1 seul".
 $G = (D_1 \cap \bar{D}_3) \cup (D_2 \cap \bar{D}_3) \cup (S \cap D_3)$

$$P(G) = 0,04 \times 0,4 + 0,02 \times 0,4 + 0,93 \times 0,03 = 0,0519$$

donc $P(G) = 0,0519$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} + 1 = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

$$(1) \text{ donne } \frac{1}{\ln n} \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{(\ln n)(e-1)} \leq \frac{t_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln n)(e-1)} = 0 \text{ d'où}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{\ln n} = 1 \text{ par encadrement.}$$

e) avec $\frac{1}{2} v_{p+1} \leq u_p \leq \frac{1}{2} v_p$ on a par sommation

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_{p+1} \leq \sum_{p=1}^n u_p \leq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p$$

$$\frac{1}{2} \sum_{p=2}^n v_p \leq \sum_{p=1}^n u_p \leq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p \text{ donc}$$

$$\frac{1}{2} t_n - \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_{n+1} \leq S_n \leq \frac{1}{2} t_n \text{ or}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} t_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} v_{n+1} = 0 \text{ d'où}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty \text{ par comparaison}$$

PROBLÈME

$n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}; \quad f_0(x) = \frac{1}{e^x + 1} \quad x \in \mathbb{R}$$

Partie I

1° a) limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0 = 0$$

b) Sens de variation de f_0 et tableau de variat.

La fonction $x \mapsto e^x + 1$ dérivable et non nulle ($e^x + 1 > 0$) sur $\mathbb{R}$, donc f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0'(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$ et f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$		
$f_0(x)$	1	0

c) Montrons que $I(0; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie.

$\forall x \in \mathbb{R}, 2a - x = -x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{e^x + 1} = 1$$

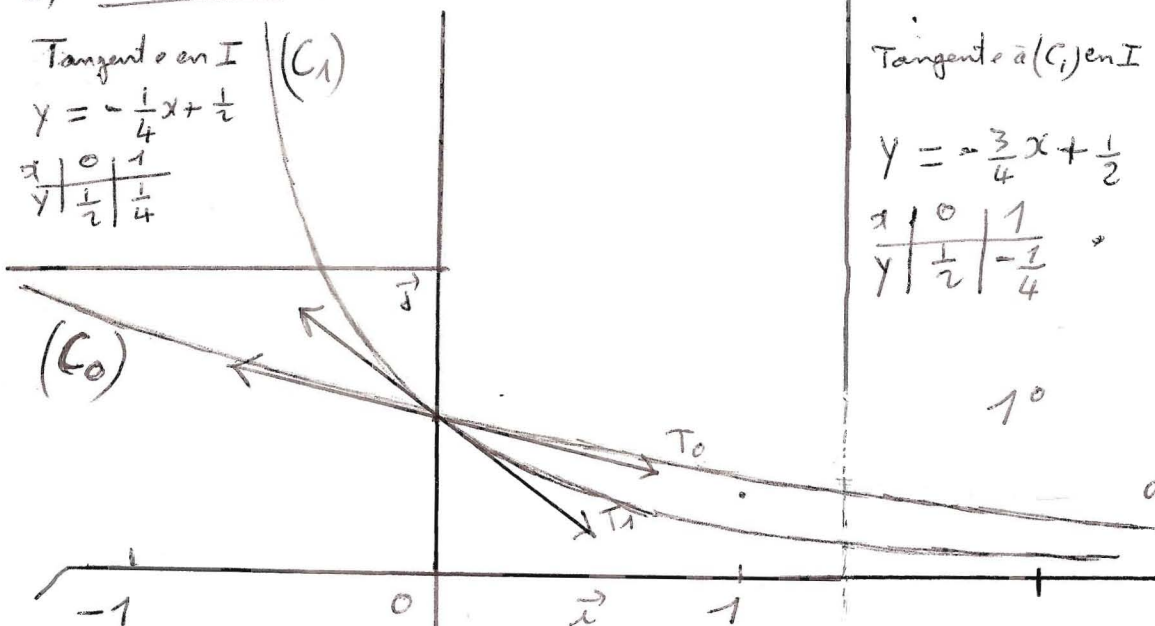
$$\frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad I(0; \frac{1}{2}) \text{ centre de symétrie.}$$

d) Traces de (C_0) : $y=1$ et $y=0$ asy. horiz.

Tangente en I

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

x	0	1
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



2° $n > 1$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-nx} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 1$$

b° Les fonctions $x \mapsto e^{-nx}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^x + 1$ dérivables et non nulles ($e^x + 1 > 0$) donc $f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x) = \frac{-n e^{-nx} (e^x + 1) - e^{-nx} \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{donc}$$

$$f_n'(x) = -e^{-nx} \frac{[n + (n+1)e^x]}{(e^x + 1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

c° Variation de f_n .

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $n > 1 \quad -e^{-nx} < 0; \quad n + (n+1)e^x > 0$
 $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $f_n'(x) < 0$ et f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$		
$f_n(x)$	$+\infty$	0

d) Vérifions que $I \in (C_n) \quad \forall n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(0) = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad I\left(\frac{0}{2}\right) \in (C_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e) Trace de (C_1)

Tangente à (C_1) en I

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

x	0	1
y	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f_1'		
f_1	$+\infty$	0

Partie II

1°

$$a) V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx = -\frac{1}{n} [e^{-nx}]_0^1 = -\frac{1}{n} (e^{-n} - 1)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n V_n = 1$$

$$\text{car} \quad n V_n = -(e^{-n} - 1)$$

comparaison de (u_n) à (v_n) avec
 $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ et $v_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$.

a) Montrons que $\forall x \in [0,1] \quad 2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e \Rightarrow 2 \leq 1 + e^x \leq 1 + e$$

$$\text{or } e^x + 1 - 2e^x = 1 - e^x \leq 0 \text{ car } 1 \leq e^x$$

$$\text{donc } \forall x \in [0,1] \quad e^x + 1 \leq 2e^x \text{ d'où}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad 2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x}$$

b) Deducisons que $\forall n \quad \frac{1}{2} v_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2} v_n$

$$2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} e^{-x} e^{-nx} \leq \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2} e^{-nx} \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x(n+1)} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2} e^{-nx} \text{ donc}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x(n+1)} dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx} dx$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{1}{2} v_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2} v_n, \quad \forall n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} v_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} v_{n+1} = 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ par encadrement.

Par ailleurs on a : $\frac{1}{2} n v_{n+1} \leq n u_n \leq \frac{1}{2} n v_n$

$$\text{et avec } v_n = -\frac{1}{n} (e^{-n} - 1) \text{ et } v_{n+1} = -\frac{1}{n+1} (e^{-(n+1)} - 1)$$

$$\text{on obtient } \frac{1}{2} \times \frac{-n}{n+1} (e^{-(n+1)} - 1) \leq n u_n \leq \frac{-1}{2} (e^{-n} - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{-n}{n+1} (e^{-(n+1)} - 1) = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} (e^{-n} - 1)$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \frac{1}{2}$ par encadrement.

$$3^\circ S_n = \sum_{p=1}^n u_p \text{ et } t_n = \sum_{p=1}^n v_p$$

$$a) \text{ Mg } 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$$

$$p > 1 \text{ et } e^{-p} > 0 \Rightarrow p e^{-p} > e^{-p}$$

$$\Rightarrow e^{-p} > \frac{e^{-p}}{p} \text{ donc } 0 \leq \frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$$

Par sommation on a :

$$0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \sum_{p=1}^n e^{-p}$$

or $\sum_{p=1}^n e^{-p}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{-1} \neq 1$ et de 1^{er} terme e^{-1} donc

$$\sum_{p=1}^n e^{-p} = \frac{e^{-1} (1 - (e^{-1})^{n+1})}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e-1} (1 - e^{-n-1})$$

$$= \frac{1}{e-1} (1 - e^{-n-1}) \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\text{car } e^{-n} > 0 \Rightarrow -e^{-n} < 0 \Rightarrow 1 - e^{-n} < 1$$

$$\text{d'où } \boxed{0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}}$$

b) Soit $h(t) = \ln t \quad h'(t) = \frac{1}{t} \quad t > 0$

$$p \leq t \leq p+1 \Rightarrow \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p} \quad \forall p \geq 1$$

h est dérivable sur $[p; p+1]$ et $\frac{1}{p+1} \leq h' \leq \frac{1}{p}$

d'après I.A. Fappliquée à $[p; p+1]$ on a :

$$((p+1) - p) \frac{1}{p+1} \leq h(p+1) - h(p) \leq (p+1 - p) \frac{1}{p}$$

$$\boxed{\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p} \quad \forall p \geq 1}$$

Par sommation et après simplification on a :

$$c) \frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n+1) \Rightarrow \sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \ln n \Rightarrow$$

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - 1 \leq \ln n \Rightarrow \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln n$$

$$\text{d'où } \boxed{\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln n}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = +\infty$$

$$\text{or } t_n = \sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=1}^n \left(\int_0^1 e^{-px} dx \right) = \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} \right)$$

$$t_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \text{ avec } 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\text{donc } \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{e-1} \leq t_n \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = +\infty \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$$

$$c) \Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \frac{1 + \ln n}{\ln n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} = 1$$