D4

LJAA

MATHEMATIQUES
SERIE C
DUREE : 4 HEURES

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD direct tel que : AB = a et BC = 2a, où a est un nombre réel strictement positif. On désigne par K le milieu du segment [BC].

1- m désigne un nombre réel non nul, et on désigne par G_m le barycentre des points pondérés

(A, m), (B, - 1) et (C, 1).

fig 0,25 **a). Préciser la position de G_1.**

0,5 **b). Déterminer l'ensemble (E) des points G_m lorsque m décrit IR\{0}.**

0,5 +0,25 **c). Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a\sqrt{5}$.**

0,25 **d). Déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre réel k tel que le point A appartient à l'ensemble (L_k) des points M qui vérifient : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$.**

2- Soit s la similitude directe telle que : s(A) = K et s(B) = D.

0,5 **Déterminer le rapport et l'angle de s.**

3- On veut préciser la position du centre O de la similitude s.

a). Les droites (AB) et (DK) se coupent en I.

0,5 **Démontrer que les points A, O, K et I sont cocycliques.**

0,5 **En déduire que BK = BO = BA.**

0,5 **b). Démontrer que DK = DO.**

0,25 **c). En déduire que O est le symétrique de K par rapport à la droite (BD).**

4- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct tel que les affixes des points A, B et D sont respectivement 0, 1 et 2i.

0,5 **a). Déterminer l'expression complexe de s et l'affixe de O.**

0,5 **b). Vérifier que O est bien le symétrique de K par rapport à la droite (BD) en montrant que BK = BO et que les droites (OK) et (BD) sont orthogonales.**

Exercice 2 : (4 points)

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y=\frac{1}{2}x$, la symétrie S d'axe $(\mathscr{D})$ et de direction celle de l'axe (OJ).

Soit g l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = -\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

0,25 - 0,75

1 1. Montrer que g est bijective et vérifier que $g\circ S = S\circ g$.

0,75 2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathscr{P}$ invariants par g.

0,75 3. Montrer que, si M n'est pas invariant par g, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on precisera.

1 4. Calculer les coordonnées du point H intersection de (MM') et de (Δ).

0,5 5. Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

PROBLEME : (11 points)

m étant un nombre réel, on appelle f_m l'application de]0 ; +∞[dans IR qui, à x, associe

$f_m(x)=\frac{x^2-1}{4}-\frac{m}{2}\ln x$ **et (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé**

4 $(O ; I, J)$, l'unité de longueur est 5 cm.

Partie A : L'objet de cette partie est l'étude de f_m.

1- 0,25 a). Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$.

0,75 b). En distinguant les cas où m = 0, m< 0 et m > 0, calculer $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x)$.

0,25+0,25+0,25 **2-** a). Justifier que f_m est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, puis donner suivant les valeurs de m, les différents tableaux de variation possibles.

0,5 b). Montrer que, par un point $M_0(x_0 ; y_0)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, il passe une et seule courbe (C_m).

0,25 c). Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un unique point Ω dont on précisera les coordonnées.

0,25 0,75 Construire les courbes (C_0), (C_4) et (C_{-1}) dans le même repère (O ; I, J).

4 **Partie B :** Dans cette partie, on considère la fonction f_4 telle que : $f_4(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - 2\ln x$.

0,75 **1-** Montrer que l'équation $f_4(x) = 0$ possède deux solutions et deux seulement dont l'une x_0 appartient à [3 ; 4] (On ne demande pas de calculer x_0 ici).

0,5 Montrer que $x_0 = \sqrt{1+8\ln x_0}$.

2- On considère la fonction numérique g définie de [3 ; +∞ [vers IR par : $g(x) = \sqrt{1+8\ln x}$.

0,25 Montrer que : $g(x) \geq 3$,

0,5 et que : $0 \leq g'(x) \leq \frac{4}{9}$.

3- Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = g(u_n) = \sqrt{1+8\ln(u_n)}$.

0,25 a). Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN, \quad u_n \geq 3$.

0,5 b). Montrer que : $\forall n \in IN, \quad |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|$.

0,5+0,25 c). Montrer que : pour tout n de IN, $|u_n - x_0| \leq (\frac{4}{9})^n$. En déduire la convergence de (u_n).

0,5 d). Trouver le plus petit entier n tel que u_n soit une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

3 **Partie C :** On considère la fonction h définie sur]0 ; +∞[par : $h(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$. [On pourra reconnaître que $h = f_1$].

1- On note λ un réel strictement positif.

0,5 a). A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x \, dx$.

0,5 En déduire la valeur de $A(\lambda) = \int_\lambda^1 h(x)\, dx$.

0,25 b). Déterminer la limite A de $A(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs supérieures.

2- Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{p=n} h(\frac{p}{n})$.

a). En utilisant le sens de variation de h sur]0 ; 1], démontrer que, pour p entier naturel

0,5 vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a : $\frac{1}{n}h(\frac{p+1}{n}) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n}h(\frac{p}{n})$.

0,5 b). En dé[redacted] $\frac{1}{n}h(\frac{1}{n}) \leq A(\frac{1}{n}) \leq S_n$.

0,25 puis que : $A(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq A(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}h(\frac{1}{n})$.

0,25+0,25 c). En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

I

$G_m = \mathrm{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ m & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \vec{AG_1} = \vec{BC} = \vec{AD}$

a) $G_1 = \mathrm{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{AG_1} = \vec{AD}$ donc $G_1 = D$

b) $G_m = \mathrm{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ m & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \vec{AG_m} = \frac{1}{m}\vec{CB}$

$\Leftrightarrow G_m \in \mathcal{D}(A, \vec{CB})$ privé de A

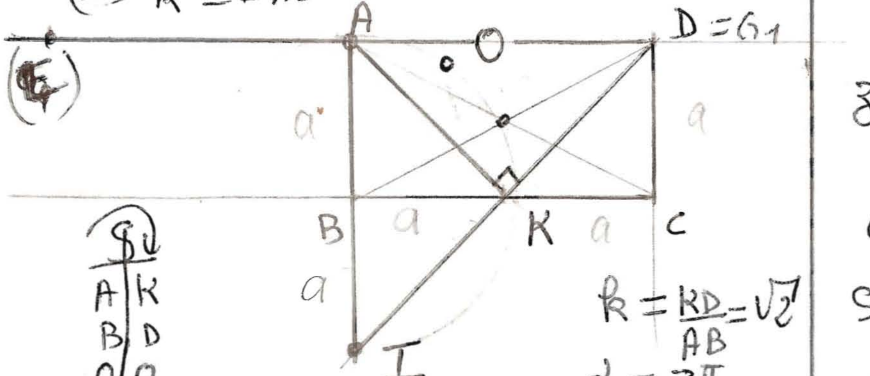
d'où $(E) = (AD) \setminus \{A\}$

c) $M \in (F) \Leftrightarrow MG_1 = a\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$(F) = \mathcal{C}(G_1; a\sqrt{5}) = \mathcal{C}(D; DB)$

d) $A \in (L_k) \Leftrightarrow k = -AB^2 + AC^2 =$

$\Leftrightarrow k = -AB^2 + AB^2 + AD^2 = AD^2 = 4a^2$



S	
A	K
B	D
O	O

$k = \frac{KD}{AB} = \sqrt{2}$

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$

3° a) $I \in (AB) \cap (KD)$ donc

$(\vec{AB}, \vec{KD}) = (\vec{IA}, \vec{IK})$ $[\pi]$ or

$(\vec{AB}, \vec{KD}) = (\vec{OA}, \vec{OK})$ donc

$(\vec{IA}, \vec{IK}) = (\vec{OA}, \vec{OK})$ $[\pi]$, les points I, A, K et O n'étant pas alignés sont cocycliques.

Montrons que $BK = BO = BA$

Le triangle AKI étant rectangle en K, les points A, K, I et O appartiennent au cercle de centre B et de rayon a donc

$BK = BO = BA = a$.

b) Montrons que $DK = KO$

$S(O) = O$ et $S(B) = D$ donc $OD = \sqrt{2}\, OB$

or $OB = BA$ et $DK = AB\sqrt{2}$ donc

$\boxed{DK = DO = a\sqrt{2}}$

c) $BO = BK$ et $DO = DK$ donc (BD) est la médiatrice de $[OK]$ ainsi $O = S_{(BD)}(K)$.

4° $z_A = 0$ $\quad z_B = 1$ $\quad z_C = 1 + 2i$

a) $z_D = 2i$ $\quad z_K = 1 + i$ $\quad z'$

$z' = az + b$ avec $\begin{cases} 1 + i = b \\ 2i = a + b \end{cases}$

$a = 2i - 1 - i = -1 + i$

$S : z' = (-1+i)z + 1 + i$

$z_O = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{2-i} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

b) $BK = |z_K - z_B| = |1 + i - 1| = |i| = 1$

$BO = |z_O - z_B| = \left|\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i - 1\right| = 1$

donc $BK = BO$

$z_{\vec{OK}} = z_K - z_O = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ et $\vec{OK}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$z_{\vec{BD}} = z_D - z_B = 2i - 1$ et $\vec{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix}$

$\vec{OK} \cdot \vec{BD} = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 0$ donc

$(OK) \perp (BD)$ et $BK = BO$ ainsi

O est bien le symétrique de K par rapport à la droite (BD).

II

$s\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$ $\quad g \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$

1° Le déterminant du système est

$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$ donc g bijective

L'expression analytique de $g \circ s$ est

$\begin{cases} x'' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y'' = -\frac{3}{4}x + x - y + \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y'' = \frac{1}{4}x - y + \frac{1}{2} \end{cases}$

L'expression analytique de $s \circ g$ est

$\begin{cases} x''' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y''' = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{4}x - y - \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x''' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y''' = \frac{1}{4}x - y + \frac{1}{2} \end{cases}$

$x''' = x''$ et $y''' = y''$ donc $\boxed{g \circ s = s \circ g}$

2° $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = -\frac{3}{4}\cancel{x} + \frac{1}{2} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x + 2 \\ 4y = -3\cancel{x} + 2 + 4y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

L'ensemble des points M de P invariants par g est la droite

$\boxed{(\Delta) \quad x = \frac{2}{3}}$

3° Soit $M \notin (\Delta)$ on a :

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x + 1 \\ \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}x + 1) \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\lambda = -\frac{3}{2}x + 1$

le ~~vecteur~~ vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou $\vec{u'}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4° $\{H\} = (MM') \cap (\Delta)$

(Δ) $x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$

(MM') a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et pour coeff dir $a = \frac{1}{2}$

donc (MM') $\beta = \frac{1}{2}\alpha + b$

avec $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (MM')$ on a $y = \frac{1}{2}x + b$

et $b = y - \frac{1}{2}x$, on a alors

$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{2}\alpha + y - \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = y - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \end{cases}$

donc $H\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ y - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ avec $\{H\} = (MM') \cap (\Delta)$

$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x - \frac{2}{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{HM'}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$

donc g est l'affinité d'axe (Δ) $x = \frac{2}{3}$ de direction celle de $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et de rapport $-\frac{1}{2}$

Problème Partie A

$f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x \quad , x>0$

1° a- $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim x\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{4x} - \frac{m\ln x}{2x}\right) = +\infty$ car $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b- Si $m=0$ $f_0(x) = \frac{x^2-1}{4}$ et $\lim_{x\to 0} f_0(x) = -\frac{1}{4}$

Si $m<0$ $-m>0$ et $\lim_{0} -\frac{m}{2}\ln x = -\infty$

Si $m>0$ $-m<0$ et $\lim_{0} -\frac{m}{2}\ln x = +\infty$

donc $\lim_{x\to 0} f_m(x) = -\infty$ si $m<0$ et

$\lim_{x\to 0} f_m(x) = +\infty$ si $m>0$

2° a) f_m est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et

$\forall x>0 \quad f'_m(x) = \frac{x}{2} - \frac{m}{2x} = \frac{x^2-m}{2x}$

• Si $m=0$ $f'_0(x) = \frac{x}{2} > 0$ et $f_0 \nearrow$ sur $]0;+\infty[$

• Si $m<0$ $-m>0$ et $f'_m(x)>0$ et f_m est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

• Si $m>0$ $f'_m(x) = \frac{(x+\sqrt{m})(x-\sqrt{m})}{2x}$

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
f'_m	||	$-$	0	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	$f_m(\sqrt{m})$	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall m<0$

x	0		$+\infty$
f'_m	||	$+$	
f_m	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall m=0$

x	0		$+\infty$
f'_0	||	$+$	
f_0	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f_m(\sqrt{m}) = \frac{m-1}{4} - \frac{m}{2}\ln\sqrt{m}$
$= \frac{m-1-m\ln m}{4}$

b) Soit $M_0(x_0,y_0)$ $x_0>0$ et $x_0 \neq 1$

$M_0(x_0,y_0) \in (C_m) \iff y_0 = f_m(x_0)$

$\iff y_0 = \frac{x_0^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x_0 \iff 4y_0 = x_0^2-1-2m\ln x_0$

$\iff 2m\ln x_0 = x_0^2 - 1 - 4y_0$

$\iff m = \frac{x_0^2-1-4y_0}{2\ln x_0}$ avec $x_0>0$ et $x_0\neq 1$

Ainsi par M_0 il passe une et une seule courbe (C_m).

c) $f_m(x_0) = f_{m'}(x_0) \iff \frac{m}{2}\ln x_0 = \frac{m'}{2}\ln x_0$

$\iff \ln x_0 (m-m') = 0 \iff \ln x_0 = 0$ et $x_0=1$

De plus $\forall m \in \mathbb{R}$ $f_m(1) = 0$ donc toutes les courbes (C_m) passe par $\Omega(1;0)$.

Voir (C_0), (C_4) et (C_{-1}) au verso.

$\boxed{B}$ $f_4(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - 2\ln x$

1° $\frac{3-8\ln 2}{4} \simeq \quad < 0$

f est dérivable et strict $\searrow$ sur $]0;2]$

f est dérivable et strict $\nearrow$ sur $[2;+\infty[$

donc f réalise 1 bij de $]0;2]$ sur J et de $[2;+\infty[$ sur J or $0 \in J$ donc l'équation $f_4(x)=0$ admet 1 sol sur $]0;2]$ et 1 sol sur $[2;+\infty[$. De plus $f(3) \simeq \quad < 0$ et $f(4) \simeq \quad > 0$

donc $\boxed{3 < x_0 < 4}$

$f_4(x_0) = 0 \iff \frac{x_0^2 - 1 - 8\ln x_0}{4} = 0 \iff$
$x_0^2 = 1 + 8\ln x_0 \iff x_0 = \sqrt{1+8\ln x_0}$ car $x_0>0$

2° $g(x) = \sqrt{1+8\ln x} \quad x \geq 3$

g est dérivable sur $[3;+\infty[$ et $g'(x) =$

$g'(x) = \frac{4}{x\sqrt{1+8\ln x}} > 0$ et $g \nearrow$.

$x \geq 3 \Rightarrow g(x) \geq g(3) = \sqrt{1+8\ln 3} \simeq$

donc $\boxed{\forall x \geq 3 \quad g(x) \geq 3}$

$\begin{cases} g(x) \geq 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x\,g(x) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x\,g(x)} \leq \frac{1}{9}$
$\Rightarrow 0 < \frac{4}{x\,g(x)} \leq \frac{4}{9}$ d'où

$\forall x \geq 3 \quad 0 < g'(x) \leq \frac{4}{9}$

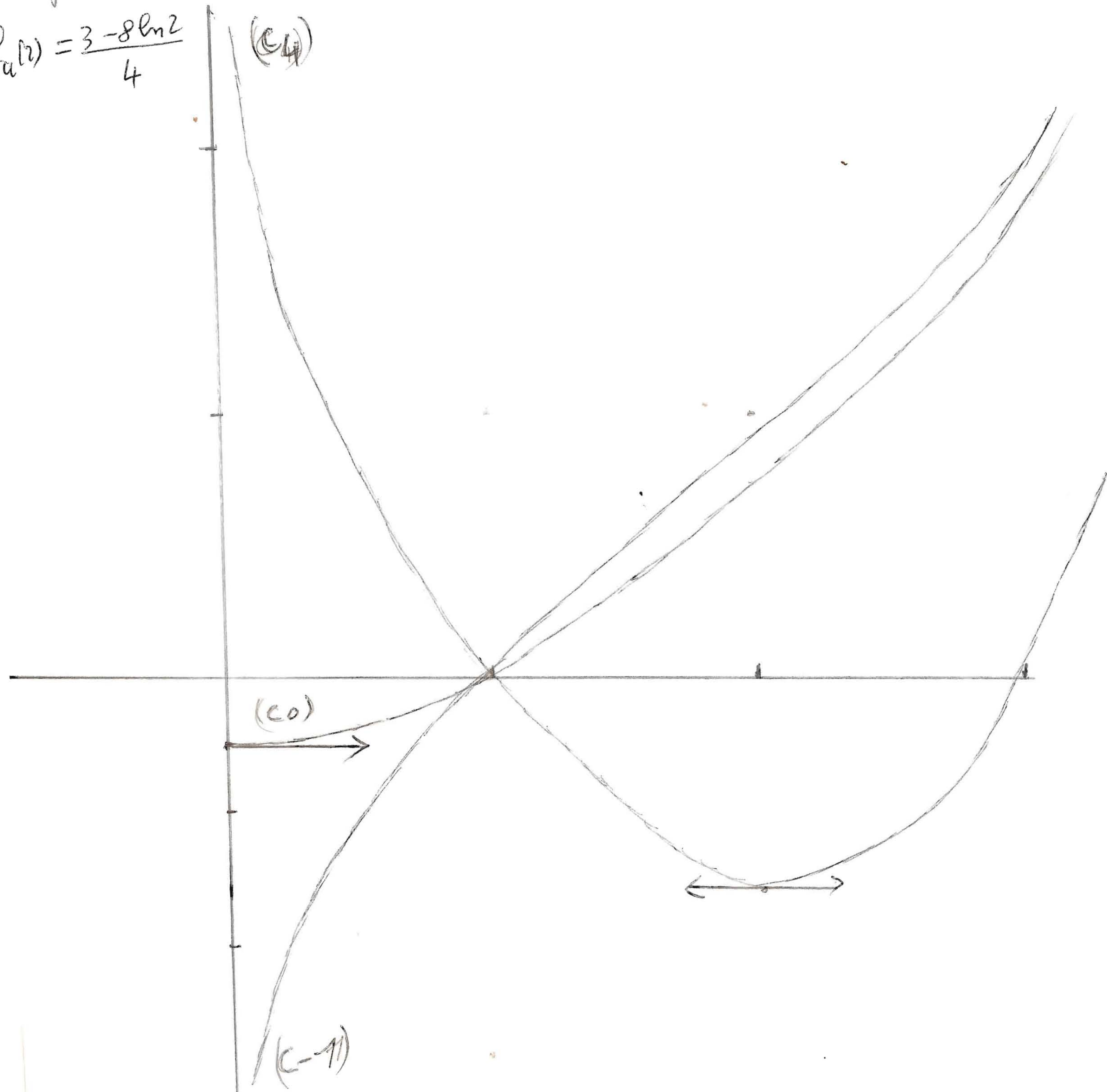
$m = -1$

x	0		$+\infty$
f'_{-1}	$\|$	$+$	
$f_{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$m = 4$

x	0		2		$+\infty$
f'_4	$\|$	$-$	0	$+$	
f_4	$+\infty$	$\searrow$	$f_4(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f_4(2) = \frac{3 - 8\ln 2}{4}$$



a) $u_0 = 3 \in [3;+\infty[$ et P_0 vraie

Si $u_n \geq 3$ on a $u_{n+1} = g(u_n) \geq 3$ d'après 2 et P_{n+1} vraie.

d'où $u_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) g est dérivable et $|g'| \leq \frac{4}{9}$ sur $[3;+\infty[$ d'après l'IAF appliquée à u_n et x_0 on a

$$|g(u_n) - g(x_0)| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|$$

or $u_{n+1} = g(u_n)$ et $x_0 = g(x_0)$ donc

$\forall n \in \mathbb{N} \; |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_0|$

c) $|u_1 - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_0 - x_0|$

$|u_2 - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_1 - x_0|$

$\vdots$

$|u_n - x_0| \leq \frac{4}{9}|u_{n-1} - x_0|$

Tous les termes étant $\oplus$ par x^t membre à membre et après simplification a :

$$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - x_0| \quad \text{or}$$

$3 \leq x_0 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -x_0 \leq -3 \Rightarrow -1 \leq u_0 - x_0 \leq 0 < 1$

et $|u_0 - x_0| \leq 1$ d'où $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \; \forall n$

$0 < \frac{4}{9} < 1$ et $\lim \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ et $\lim u_n = x_0$

ainsi la suite (u_n) CV vers x_0.

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2} \Rightarrow n \ln \frac{4}{9} \leq \ln 10^{-2} \Rightarrow n \geq \dfrac{\ln 10^{-2}}{\ln \frac{4}{9}}$

$n \geq 5{,}67$ on a $n_0 = 6$ et

u_6 est 1 val. app. de α à 10^{-2}

Partie C

1° a- $\int_d^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_d^1 = -1 - (d \ln d - d)$

donc $\int_d^1 \ln x \, dx = d - d\ln d - 1$

$$A(d) = \int_d^1 \frac{(x^2-1)}{4} dx - \frac{1}{2}\int_d^1 \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_d^1 - \frac{1}{2}(d - d\ln d - 1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3}d^3 + d\right) - \frac{1}{2}(d - d\ln d - 1)$$

$$\boxed{A(d) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}d^3 - \frac{1}{4}d + \frac{1}{2}d\ln d}$$

$$\lim_{d \to 0} A(d) = \frac{1}{3}$$

2° $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h\left(\frac{p}{n}\right)$.

a° $h \searrow$ sur $]0;2]$ donc sur $]0;1]$

$0 < \frac{p}{n} \leq x \leq \frac{p+1}{n} \Rightarrow h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq h(x) \leq h\left(\frac{p}{n}\right)$

d'après l'I.M appliquée à h on a : avec $1 \leq p \leq n-1$

$\frac{p+1}{n} - \frac{p}{n} = \frac{1}{n}$ on a

$$\frac{1}{n}h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)\,dx \leq \frac{1}{n}h\left(\frac{p}{n}\right)$$

b) $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1} h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \sum_{p=1}^{n} \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1} h\left(\frac{p}{n}\right)$

$\frac{1}{n}\sum_{p=2}^{n} h\left(\frac{p}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} h(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h\left(\frac{p}{n}\right) - \frac{1}{n}h(1)$

$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h\left(\frac{p}{n}\right) - \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ car $h(1)=0$

donc

$$\boxed{S_n - \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n} \quad \forall n$$

ii — i

ii donc $S_n \leq A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{n}\right)$

d'où $\boxed{A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{n}\right)}$

c) $\lim_{n \to +\infty} A\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{d \to 0} A(d) = \frac{1}{3}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{1}{4n^3} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}\right) = 0$

et $\lim A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.