DEVOIR DE MATHS N°1 TC&E.

Exercice 1

1° Soit $g(x) = x\cos x - \sin x$ avec $x \in [0\,;\,\pi]$.

a) Dresser le tableau de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$.

b) Monter que l'équation $g(x) = -1$ admet une seule solution.

2° Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \in\,]0\,;\,\pi]$ et $f(0) = 1$.

a) Etudier la continuité de f en 0 et sur $]0\,;\,\pi]$.

b) Sachant que pour $x \in [0 : \pi]$ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ étudier la dérivabilité de f en 0 puis sur $]0\,;\,\pi]$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} Et dresser le tableau de variation de f^{-1}.

3° Tracer la courbe (C) de f et (C') de f^{-1}

Exercice 2.

Soit f la fonction de $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ vers $[0\,;\,1]$ définie par $f(x) = \cos^2 x$.

1° a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

b) Monter que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

c) Déterminer $f^{-1}(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

d) Déterminer $(f^{-1})'(\frac{1}{4})$.

2° Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\,;\,1[$ et déterminer $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in\,]0\,;\,1[$.

3° Tracer les courbes (C) de f et (C) ' de f^{-1}.

Exercice 3.

Soit $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$ avec $x \in [-1\,;\,+\infty[$.

1° a) Etudier la dérivabilité de f au point -1 et interpréter graphiquement le résultat.

b) Démontrer que f est dérivable sur $[-1\,;\,+\infty[$.

c) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer que f est une bijection de $[-1\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2° a) Expliciter f^{-1}.

b) f^{-1} est–elle dérivable au point -1 ? Justifier.

3° Expliciter $(f^{-1})'$ en utilisant :

a) L'expression de $f^{-1}(x)$ calculée au 2 ° a).

b) Le théorème sur la dérivée d'une réciproque.

4° Tracer la courbe (C) de f et (C') de f^{-1}.

Exercice 4.

1° Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{2x}$.

2° Soit $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Justifier qu'il existe une fonction g qui prolonge f par continuité en 0.

c) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

$1°$ $g(x) = -\sin x + x\cos x$ $x \in]0;\pi[$

a) g est derivable sur $]0;\pi[$ et $g'(x) = -x\sin x < 0$ et g est $\searrow$ sur $]0;\pi[$.

g est deri sur $]0;\pi[$ et $\searrow$ et

$g(]0;\pi[) =]-\pi;0[$ et $g < 0$ sur $]0;\pi[$

b) g est deri et st decroiss sur $]0;\pi[$ donc g realise une bij de $]0;\pi[$ sur $]-\pi;0[$, $-1 \in]-\pi;0[$ donc l'eq $g(x) = -1$ admet 1 seule solut.

$2°$ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $x \in]0;\pi[$.

a) $x \mapsto \sin x$ deri et $\neq 0$ sur $]0;\pi[$ donc f est deriv sur $]0;\pi[$ et

$f'(x) = \frac{-\sin x + x\cos x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} < 0$

et f est decroissante sur $]0;\pi[$.

x	0		π
f'	0	$-$	
f	1	$\searrow$	0

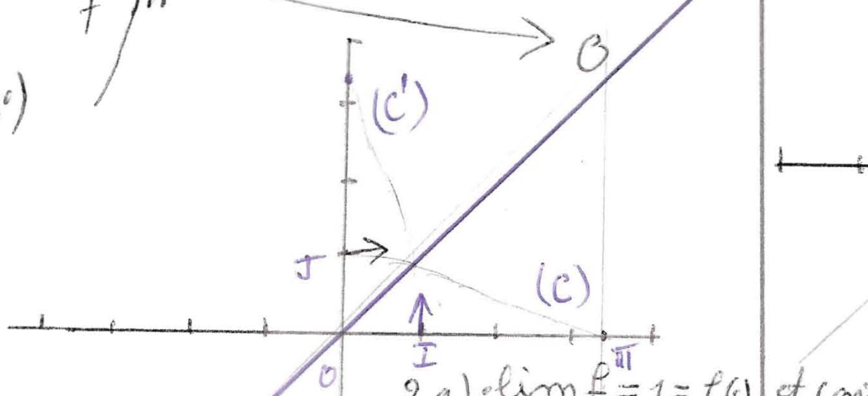
$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$

b) f est deri et st $\searrow$ sur $]0;\pi[$ donc f realise une bij de $]0;\pi[$ sur $f(]0;\pi[) =]0;1[$ ainsi f admet une bij reciproque f^{-1}

TV de f^{-1}

x	0		1
$(f^{-1})'$		$-$	
f^{-1}	π	$\searrow$	0

3°)



2 a) $\lim_0 f = 1 = f(0)$ et cont en 0

$x \mapsto x$ cont et non nulle sur $]0;\pi]$

donc $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ continue sur $]0;\pi]$.

b)

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

f est deri en 0 et $f'(0) = 0$

$x \mapsto x$ deri et $\neq 0$ sur $]0;\pi]$

f deri sur $]0;\pi]$.

II $f : [0;\frac{\pi}{2}] \to [0;1]$ $f(x) = \cos^2 x$.

$1°$ a) f est derivable sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = -2\sin x\cos x \le 0$ et f est decroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	$-$	0
f	1	$\searrow$	0

b) f est deri et st $\searrow$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ donc f realise une bij de $[0;\frac{\pi}{2}]$ sur $[0;1]$ ainsi f admet une fonction reciproq f^{-1}.

c) $f^{-1}(\frac{1}{2}) = \alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

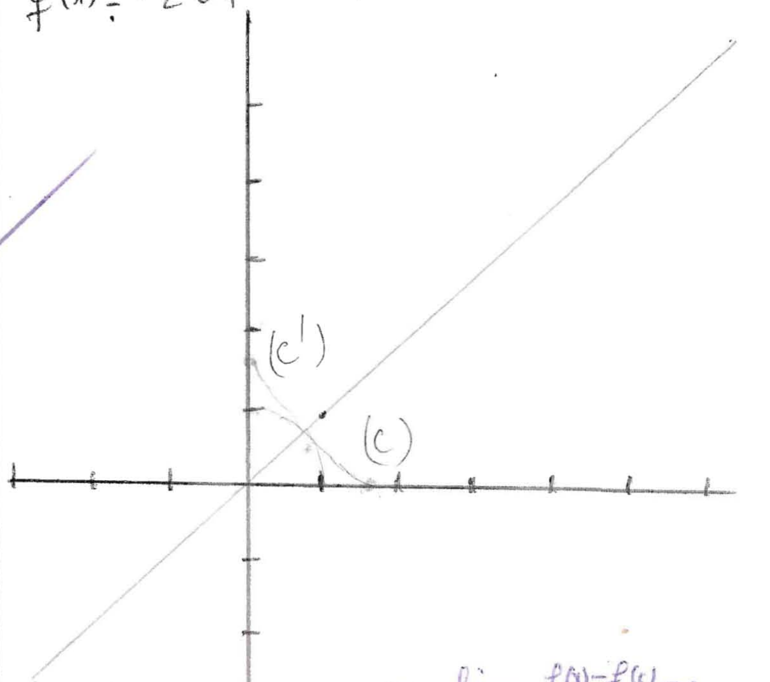
$f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = -1$

d) $f^{-1}(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{3}$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$2°$ f est deriv sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[$ $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est derivable sur $f(]0;\frac{\pi}{2}[) =]0;1[$. on trouve

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ car

$f'(x) = -2\sqrt{f}\sqrt{1-f(x)}$ et $f' \circ f^{-1}(x) = -2\sqrt{x}\sqrt{1-x}$



$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 \quad x \in [-1;+\infty[$

1°) a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x+1} = 0$ donc f est derivable en -1 et $f'(-1) = 0$ ainsi la courbe de f admet au point d'abscisse -1 une tangente horizontale.

b) $x \mapsto (x+1)$ est deriv et strict positive sur $]-1;+\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $x \mapsto (x+1)\sqrt{x+1}$ sont derivables sur $]-1;+\infty[$ d'où f est deriv sur $]-1;+\infty[$. f étant dérivable en -1 est derivable sur $[-1;+\infty[$.

c) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1} \geq 0$ et f est ↗

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$

d) f deri et st ↗ sur $[-1;+\infty[$ donc f réalise 1 bij de $[-1;+\infty[$ sur $J = f([-1;+\infty[) = [-1;+\infty[$.

2°) a) Soit $y \geq -1$ et $f(x) = y$ on a

$(x+1)\sqrt{x+1} - 1 = y \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1} = y+1$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 = (y+1)^2 \Leftrightarrow x+1 = (y+1)^{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt[3]{(y+1)^2}$ d'où

$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

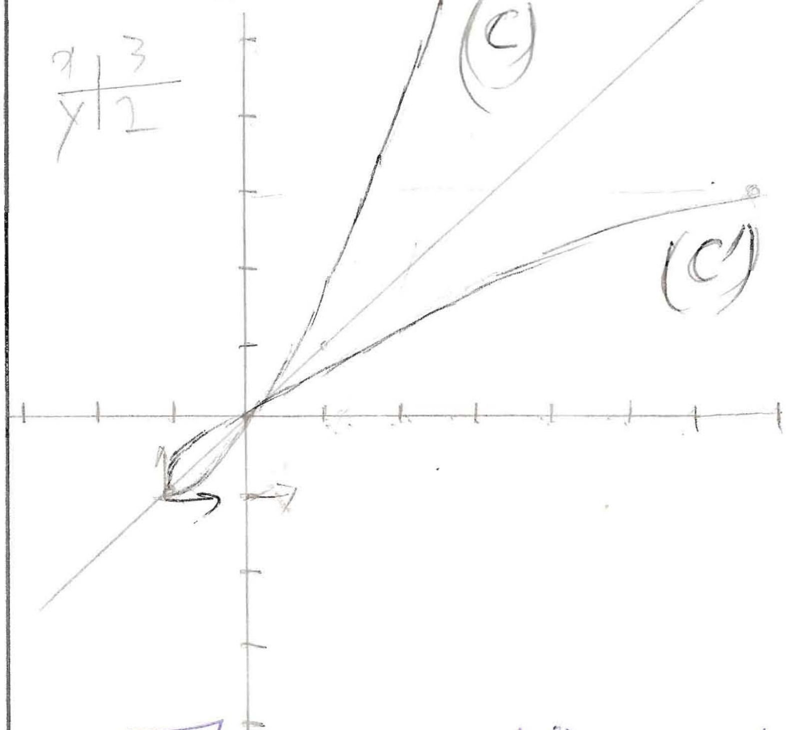
b) non car $f^{-1}(-1) = -1$ et $f'(-1) = 0$

3°) a) $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

$\forall x \in]-1;+\infty[$.

b) $f' \circ f^{-1}(x) = \frac{3}{2}\sqrt{f^{-1}(x)+1} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x+1}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x+1}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} \quad \forall x > -1$



IV 1° $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ et $\lim\limits_{0} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-x}-1}{-x} = -\frac{1}{4}$

2° a) $D_f = [-1;0[\cup]0;+\infty[$

b) $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{0} f = \frac{1}{2}$ donc la fonct g tq $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ prolonge f par continuité en 0.

c) $\frac{g(x) - g(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{-1}{2(2\sqrt{1+x}+x+2)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\frac{1}{8}$

g est deri en 0 et $g'(0) = 0$

(C_g) admet au point $A\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ une tangente de coeff. direct $-\frac{1}{8}$.