LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO
Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

Devoir de maths N° 5 TB.

EXERCICE 1(5 points)

Au 1ier janvier 2005,une ville A compte 200000 habitants, une ville B compte 150000 habitants et une ville C compte 100000 habitants. On a constaté que la population de la ville A diminue de 3% par an, celle de la ville B augmente de 5% et celle de la ville C augmente constamment de 10000 habitants chaque année.
Pour tout entier naturel n, on désigne par Un la population de la ville A au 1ier janvier de 2005 + n, par Vn la population de la ville B et par Wn celle de la ville C à la même date.

1°a) Préciser U_0 et calculer U_1 et U_2.
b) Préciser V_0 et calculer V_1 et V_2.
c) Préciser W_0 et calculer W_1 et W_2.
2°a) Montrer que la suite (Un) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Montrer que la suite (Vn) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
c) Montrer que la suite (Wn) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
d) Exprimer Un, Vn et Wn en fonction de n.
e) A quelle date la population de la ville B sera t'elle pour la première fois supérieure à celle de la ville A.
f) Calculer la population de chacune des trois villes au premier janvier 2009.

EXERCICE 2(5 points)

La cote d'une voiture d'occasion est donnée dans la tableau suivant.

Année de mise en circulation	1991	1992	1993	1994	1995
Rang de l' année x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i	42900F	54200F	64100F	81600F	102000F

1° Représenter le nuage de points M(x ; y) de cette série dans un repère orthogonal, d'unités graphiques 2 cm pour 1 an en abscisses et 1cm pour 10000 F en ordonnées.
2° Les points n'étant pas parfaitement alignés, on pose z = lny.

a)Recopier et remplir le tableau suivant.(donner les valeurs de z_i sous forme décimale à 0,01 près par défaut).

x_i	1	2	3	4	5	6
$Z_i = \ln y_i$						

b) Représenter le nuage de points N (x ; z) de cette nouvelle série dans un nouveau repère orthogonal, d'unités graphiques 2 cm pour 1 an en abscisses et 1cm pour 0,1 en ordonnées.
3°a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.. Un ajustement affine est – il justifier ?
b) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de z en x.(on donnera les coefficients à 0,01 près par défaut.
c) Représenter la droite (D) sur la nouvelle figure. 1998
d) Calculer la valeur de z donnée par l'équation précédente pour l'année 1988.En déduire une estimation de la cote de cette voiture de l'année 1988.(On donnera une valeur arrondie à 100F près).

1998

PROBLEME.(10 points)

Partie A : Détermination de constantes.

1° Résoudre dans IR^3, le système d'équations suivant d'inconnue (a ; b ; c).

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + c = 0 \\ e^2 a + b + c = e^2 \end{cases}$$

2° Soit h la fonction définie sur] -1 ; + ∞ [par : $h(x) = a(x+1)^2 + b + c\ln(x+1)$ où a , b et c sont des nombres réels. Le tableau de variation de h se présente comme suit :

x	-1		0		+∞
h' (x)		–	0	+	
h (x)		↘	3	↗	

a) Calculer la dérivée h ' de h en fonction de a et de c..

b) Sachant que la courbe représentative de h passe par le point E $(e-1, e^2)$ et à l'aide du tableau de variation de h, écrire un système de trois équations à trois inconnues permettant de déterminer les réels a, b et c.

c) Déterminer les valeurs des réels a, b et c (On pourra utiliser la question 1°).

Partie B :Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur] -1 ; +∞ [, par $g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$ et g' sa dérivée.

1° Calculer les limites de g en -1 et en +∞. On rappelle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

2°a) Pour x > - 1, calculer g' (x) et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) En déduire le signe de g (x) .

PARTIE C : Etude de la fonction f.

On considère la fonction f définie sur] -1 ; + ∞ [par: $f(x) = x + 1 + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}$. On désigne par (C) Sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1° a) Calculer la limite de f en -1 et donner une interprétation graphique du résultat.

b) Calculer la limite de f en +∞.

2° a) Calculer f'(x) pour tout x de] -1 ; +∞ [, puis montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Préciser le signe de f' (x) et en déduire le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3°a) Montrer que . l'équation f (x) = 0 admet une solution unique ∝ appartenant à l'intervalle] – 0, 5 ; 0[.

b) Trouver un encadrement de ∝ d'amplitude 0,1.

4°a) Montrer que la droite (D) d'équation y = x + 1 est une asymptote à (C).

b) Etudier la position relative de (C) et (D) . On précisera les coordonnées de leur point commun A.

5° a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Dans le repère (O, I, J) tracer la tangente (T) , l' asymptote (D) et la courbe *(C)*.

Exercice 1

1° a) $u_0 = 200.000$ Hab.

$u_1 = 200.000 - 0{,}03 \times 200.000$

$\boxed{u_1 = 194\,000 \text{ hab}}$

$u_2 = 194.000 - 0{,}03 \times 194000$

$\boxed{u_2 = 188\,180 \text{ hab}}$

b) $V_0 = 150.000$ hab.

$V_1 = 150.000 + 0{,}05 \times 150.000$

$V_1 = 157\,500$ hab.

$V_2 = 157\,500 + 0{,}05 \times 157\,500$

$\boxed{V_2 = 165375 \text{ hab}}$

c) $W_0 = 100.000$ Hab.

$W_1 = 100.000 + 10.000 = \boxed{110.000}$

$W_2 = 110.000 + 10.000 = \boxed{120.000}$

2° a)

$u_{n+1} = u_n - 0{,}03\,u_n = 0{,}97\,u_n$

donc la suite (u_n) est une suite géometrique de raison 0,97 et de premier terme $u_0 = 200.000$ Hab

b) $V_{n+1} = V_n + 0{,}05\,V_n$

$V_{n+1} = 1{,}05\,V_n$ donc la suite (V_n) est une suite géometrique de raison 1,05 et de premier terme $V_0 = 150.000$

c) $W_{n+1} = W_n + 10.000$

donc la suite (W_n) est une suite arithmetique de raison 10.000 et de premier terme $W_0 = 100.000$ Hab

d)

$$\boxed{\begin{aligned} u_n &= 200.000\,(0{,}97)^n \\ V_n &= 150.000\,(1{,}05)^n \\ W_n &= 100.000 + 10.000\,n \end{aligned}}$$

e) $150.000\,(1{,}05)^n \geq 200.000\,(0{,}97)^n$

$(1{,}05)^n \geq \frac{4}{3}(0{,}97)^n$

$\ln(1{,}05)^n \geq \ln\frac{4}{3} + \ln(0{,}97)^n$

$n \geq \dfrac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{1{,}05}{0{,}97}}$ $\quad n \geq 3{,}63$

on peut prendre $\boxed{n = 4}$

f) 2009 correspond à $n=4$

$u_4 = 200.000\,(0,97)^4 = 177059$

$\boxed{u_4 \simeq 177059 \text{ Habitants}}$

$V_4 = 150.000\,(1,05)^4 = 182326$

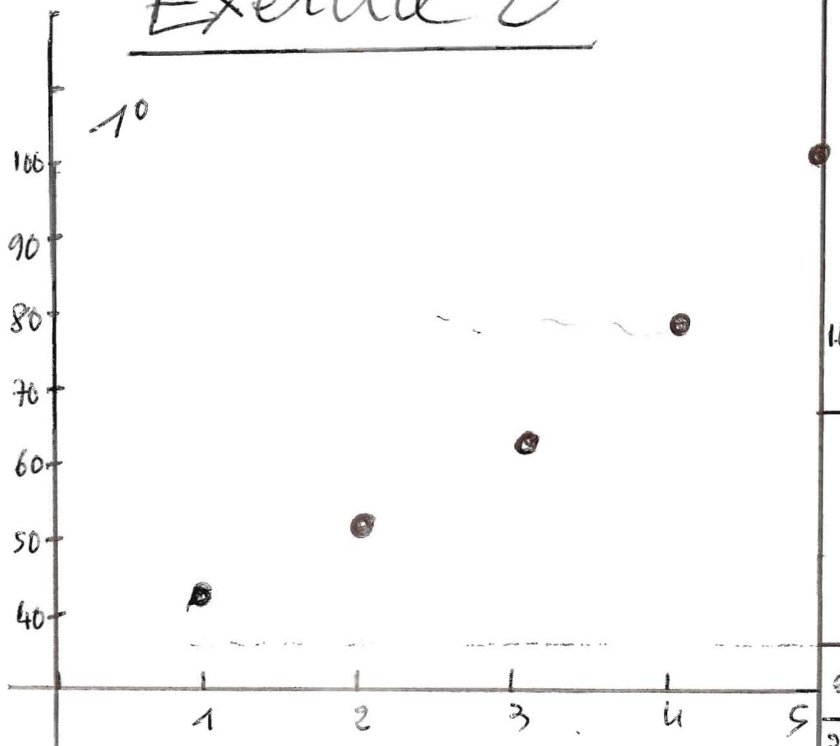
$\boxed{V_4 = 182326 \text{ Hab}}$

$W_4 = 100.000 + 10.000 \times 4$

$\boxed{W_4 = 140.000 \text{ Hab}}$

Exercice 2

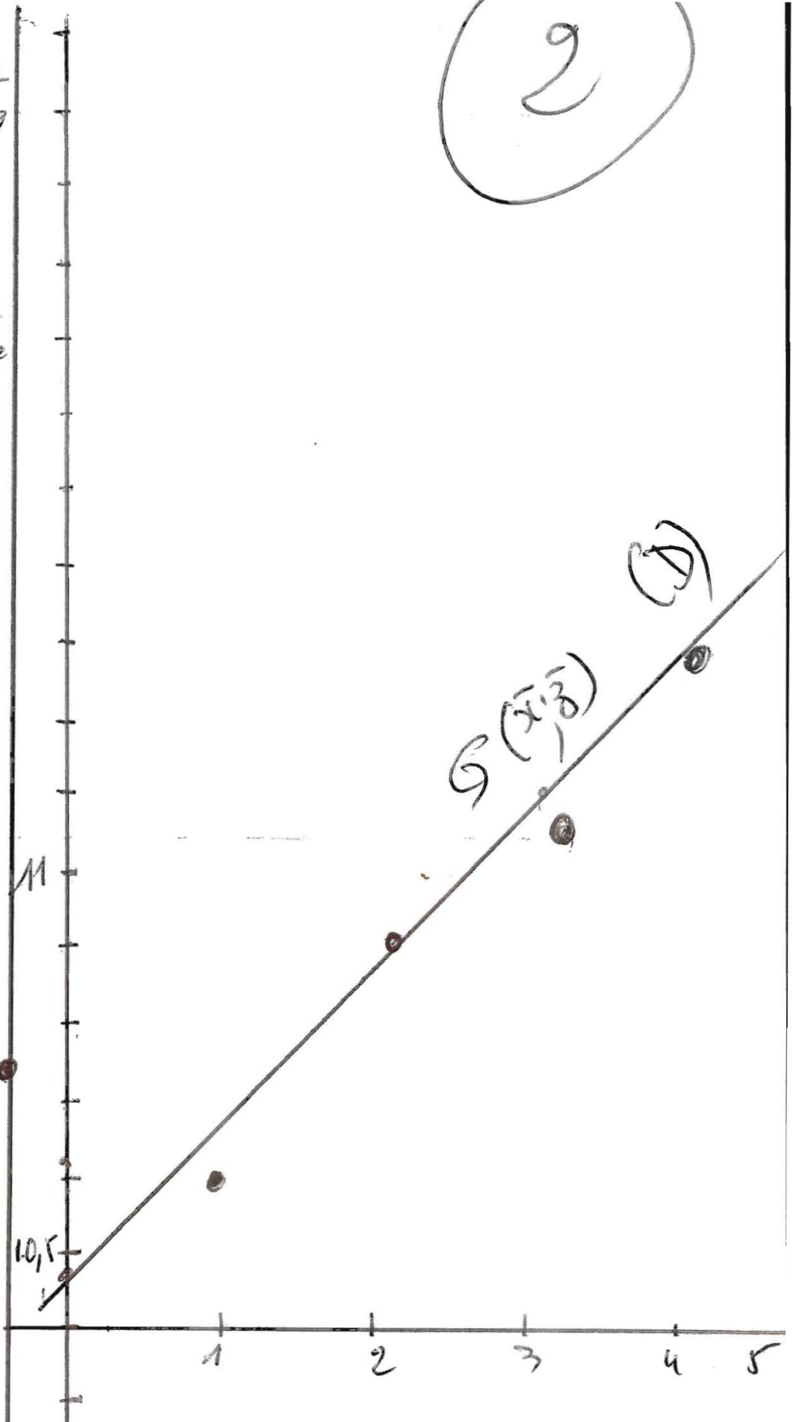
1°



2°

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$	10,66	10,90	11,06	11,30	11,53

2



3°) a) Tableau de calcul.

x_i	1	2	3	4	5
z_i	10,66	10,9	11,06	11,30	11,53
x_i^2	1	4	9	16	25
z_i^2	$10,66^2$	$10,9^2$	$11,06^2$	$11,3^2$	$11,53^2$
$x_i z_i$	10,66	21,8	33,18	45,2	57,65

$T_1 = \sum x_i = 15$ $\quad T_3 = \sum z_i = 55,45$

$T_2 = \sum x_i^2 = 55$ $\quad T_4 = \sum z_i^2 = 615,40$

$\bar{x} = \frac{T_1}{5} = 3$ $\quad \bar{z} = \frac{T_3}{5} = 11{,}09$

$V(x) = \frac{55}{5} - 3^2$ $\quad V(z) = \frac{615{,}4}{5} - 11{,}09^2$

$V(x) = 11 - 9 = 2$ $\quad V(Y) = 0{,}0919$

$Cov(x, z) = \frac{T_5}{5} - \bar{x}\bar{z} = \frac{168{,}49}{5} - \bar{x}\bar{z}$

$Cov(x, z_i) = 0{,}428$

$r = \frac{Cov(x, z_i)}{\sqrt{V(x)\,V(z)}} = 0{,}99$

$\boxed{r = 0{,}99}$ Il existe une très forte corrélation entre x et z ~~car~~ r très proche de 1.

b) Droite de regression de z en x.

$z = ax + b$ avec

$a = \frac{Cov(x,)}{V(x)} = \frac{0{,}428}{2} = 0{,}21$

$b = \bar{z} - a\bar{x}$

$b = 11{,}09 - 0{,}21 \times 3$ (D)

$b = 10{,}46$

$\boxed{z = 0{,}21x + 10{,}46}$

c) Voir figure. 3

d) L'année 1998 correspond à $x_i = 8$ pour

$z = 12{,}14$

$12{,}14 = \ln y_i$ donc

$y_i = e^{12{,}14} \simeq \underline{187.212\,F}$

Problème

Partie A

1° Résolvons dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+c=0 \\ e^2a+b+c=e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-2a \\ b=3-a \\ e^2a-3a=e^2-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-2a \\ b=3-a \\ a=1 \end{cases}$$

$a=1 \quad b=2 \quad$ et $c=-2$

d'où $\boxed{S_{\mathbb{R}^3}=\{(1;2;-2)\}}$

2° $h(x)=a(x+1)^2+b+c\ln(x+1)$

a) h est dérivable sur $]-1;+\infty[$

et $h'(x)=2a(x+1)+\frac{c}{x+1}$

b) $h(0)=3 \quad h'(0)=0$ et

$h(e-1)=e^2$ donc

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+c=0 \\ e^2a+b+c=e^2 \end{cases}$$

c) D'après 1° on a

$\boxed{a=1 \quad b=2 \quad \text{et} \quad c=-2}$

Partie B

1° $g(x)=(x+1)^2+2-2\ln(x+1)$

1° $\lim\limits_{x\to-1} x+1=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} g(x)=+\infty$

$g(x)=(x+1)\left((x+1)+\frac{2}{x+1}-\frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{+\infty}\frac{2}{x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

2° a) g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $g'(x)=2(x+1)-\frac{2}{x+1}$

$g'(x)=\frac{2(x+1)^2-2}{x+1}=\frac{2[(x+1)^2-1]}{x+1}$

$g'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$

$x+1>0$; $x+2>0$ et $g'(x)$ est de signe de x sur $]-1;+\infty[$

donc sur $]-1;0[$ $g'<0$ et

g est décroissante sur $]-1;0[$.

sur $]0;+\infty[$ $g'>0$ et

g est croissante sur $]0;+\infty[$.

b) Tableau de variation de g

x	-1		0		
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1 est le minimum de g sur $]-1;+\infty[$ atteint en 0, or $1>0$

donc $g(x)>0$ sur $]-1;+\infty[$.

Partie C

$$f(x) = x+1+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

1°a) $\lim\limits_{x \to -1^+} x+1 = 0$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X \to 0} \frac{\ln X}{X}$$

$$= \lim_{X \to 0^+} \frac{1}{X}\ln X = -\infty \text{ donc}$$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $x=-1$ est une asymptôte verticale à (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

2°a) f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et

$$f'(x) = 1 + 2\,\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2+2-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

or $g(x) = (x+1)^2+2-2\ln(x+1)$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}}$

b) or $(x+1)^2>0$ et d'après c de 2° B on a $g(x)>0$ d'où $f'(x)>0$ et f est croissante sur $]-1;+\infty[$.

c) Tableau de variation

x	-1		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3°a) $f(x)=0$ admet une solution unique

f est dérivable et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur IR or $0 \in$ IR donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α

de plus $f(-0,5) \simeq \quad <0$

$f(0)=1>0$

$f(-0,5) < 0 < f(0)$ donc $-0,5<\alpha<0$

b)

4°a) $f(x)-(x+1)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ donc la

droite (D) $y=x+1$

est une asymptote à (C).

b) $\ln(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x+1\geq 1$

$\Leftrightarrow x\geq 0$

x	-1		0		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

sur $]-1;0[$ $f(x)-(x+1)<0$ et

(C) est au dessous de (D)

sur $]-1;0[$

sur $]0;+\infty[$ $f(x)-(x+1)>0$

(C) est au dessus de (D)

au point d'abscisse 0, (C)

coupe (D).

$f(0)=1$ et $A(0;1)$.

5°a) (T) $y=3x+1$