70 copies

LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO
Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

Devoir de maths N° 5 TA1.

EXERCICE 1(5 points)

Une étude statistique a montré que lorsqu'un élève commence sa scolarité, il a autant de chance de reprendre sa classe que de ne pas la reprendre.

Lorsqu'il n'a pas repris sa classe, la probabilité qu'il réalise le même « exploit » l'année suivante est $\frac{1}{3}$.

Lorsqu'il a repris sa classe, la probabilité qu'il reprenne la même classe l'année suivante est $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel n, on considère les événements suivants :

A_n « l'élève n'a pas repris sa classe à la $n^{\text{ième}}$ année ». et $\overline{A_n}$ est l'événement contraire de A_n.

On pose $P_n = P(A_n)$.

1° On considère un élève au cours des deux premières années de sa scolarité, $n \in \{1 ; 2\}$.

a) Que signifie A_1 ? Préciser P_1 .
b) Que signifie P_2.
c) Calculer les probabilités des événements suivants :

- « l'élève n'a pas repris sa classe les deux premières années.
- « l'élève a repris sa classe à la première année mais pas à la deuxième année ».

d) En déduire $P(A_2)$
e) Calculer la probabilité de l'événement « l'élève n'a pas repris sa classe à la première année sachant qu'il n'a pas repris sa classe à la deuxième année ».

2° On donne $P(A_n) = \frac{1}{3}P(A_{n-1}) + \frac{1}{5}P(\overline{A}_{n-1})$, pour tout entier naturel $n \geq 2$.

a) Exprimer $P(\overline{A}_{n-1})$ en fonction de $P(A_{n-1})$.
b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a $P_n = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$.

3° On pose $U_n = P_n - \frac{3}{13}$ et $U_1 = \frac{7}{26}$, pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{15}$.
b) Exprimer (U_n) puis P_n en fonction de n.

EXERCICE 2(4 points)

Le tableau suivant représente l'indice des prix à la consommation, base 100 en 1970.

Année	1972	1974	1976	1978	1980	1982
Rang x_i	2	4	6	8	10	12
Indice y_i	112	136	167	199	252	316

1° a) Représenter le nuage de points de cette série dans un repère orthogonal d'origine A (0, 100), d'unités graphiques 1 cm pour 1 rang et 1cm pour 10 points d'indice. Que suggère- t il ?

c) Calculer les coordonnées du point moyen G, puis le placer sur la figure.

2° a) Calculer le coefficient de corrélation r à 10^{-2} près. Confirme- t –il la suggestion précédente ? Justifier.

b) En utilisant la méthode des moindres carrées, montrer que l'équation réduite de la droite de régression (Δ) de y en x est $y = 20x + 57$. Tracer cette droite sur la même figure.

c) Quel indice aurait- on pu prévoir en 1988 avec cet ajustement ?

3° On dit qu'une méthode est la meilleure lorsqu'elle minimise la somme $S = \sum[y_i - (ax_i + b)]^2$ où $y = ax + b$ est l'équation de la droite de régression de y en x.

a) En utilisant l'équation trouvée à la question 2b, recopier et remplir le tableau suivant.

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	112	136	167	199	252	316
$ax_i + b$						
$[y_i - (ax_i + b)]^2$						

b) Calculer la somme S pour la méthode des moindres carrées.

c) La méthode de Mayer a permis d'obtenir une somme S' = 1049,5526 . des deux méthodes (moindres carrées et Mayer), quelle est alors la meilleure ? Justifier.

PROBLEME (11 points) Partie A : Etude d'une fonction homographique

Soit *g* **la** fonction numérique de la variable réelle *x* définie par $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

On désigne par (Γ) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O ; I , J) d'unité 2cm

1° a) Calculer les limites de *g* aux bornes de son ensemble de définition.

b) Donner une interprétation graphique des résultats.

2° a) Calculer *g' (x)* où *g' est* la fonction dérivée de *g.*

b) Etudier le sens de variation de *g et* dresser le tableau de variation de *g.*

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.

d) *Construire la tangente (T) , les asymptotes et la courbe* (Γ) de g dans le repère (O, I, J).

3° a) Montrer que $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ *pour* $x \neq -1$ *, en déduire une primitive G de g sur [0 ; 1].*

c) Calculer l'intégrale $K = \int_0^1 g(x)dx$.

Partie B : Etude d'une fonction composée avec ln

On considère la fonction numérique *f de* la variable réelle x définie par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ et

(C) sa courbe représentative dans le même repère orthonormé que (Γ)

1° a) Etudier le signe de g (x) et en déduire que f est définie sur] - ∞, -1 [U] 1 , +∞[.

b) Montrer que la fonction f est impaire et en déduire qu'on peut étudier f sur] 1 ; +∞ [.

2° a) Calculer f' (x) et montrer que $f'(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$

b) Préciser le signe de f ' (x) et en déduire le sens de variation de f sur] - ∞, -1 [*et* sur] 1 , +∞[.

2° a)Calculer les limites de f en 1 puis en déduire la limite de f en -1.

b) Calculer les limites de f en +∞ puis en déduire la limite de f - ∞.

3° Dresser le tableau de variation complet de f .

4° a) Montrer que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote à la (C) de f en + ∞ et en - ∞.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

c) Préciser les autres asymptotes de (C)

5° Dans le repère (O, I, J) tracer les asymptotes et la courbe *(C)* avec soin.

Partie C : Calcul d'aire.

Soit F la fonction définie sur] 1 ; + ∞ [, par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-1)\ln(x-1) - (x+1))\ln(x+1)$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur] 1 , + ∞ [.

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 2 et x = 3.

Devoir de maths N°5 TA1 2012-2013

Exercice 1

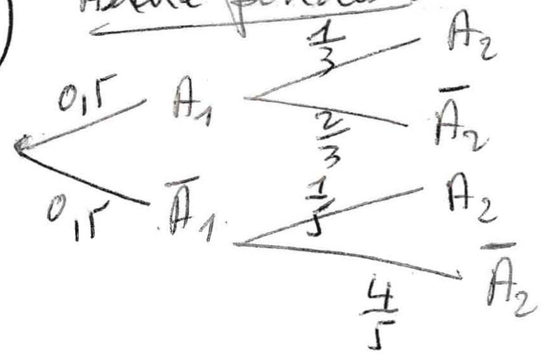
1° a)

A_1 "l'élève n'a pas repris la première année"

$P(A_1) = 0,5$

b) $P_2 = P(A_2)$ la probabilité que l'élève ne reprenne pas la 2e année.

c) Arbre pondéré



$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1)$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6}$

$P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(\bar{A}_1) \times P(A_2/\bar{A}_1)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

d) $\boxed{P(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}}$

e) $P(A_1/A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$

$P(A_1/A_2) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{6} \times \frac{15}{4} = \frac{5}{8}$

$\boxed{P(A_1/A_2) = \frac{5}{8}}$

2° $P(A_n) = \frac{1}{3} P(A_{n-1}) + \frac{1}{5} P(\bar{A}_{n-1})$

a) $P(\bar{A}_{n-1}) = 1 - P(A_{n-1})$

b) $P_n = \frac{1}{3} P_{n-1} + \frac{1}{5}(1 - P_{n-1})$

$P_n = \frac{1}{3} P_{n-1} - \frac{1}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5}$

$\boxed{P_n = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5}}$

3° $U_n = P_n - \frac{3}{13}$ et $U_1 = \frac{7}{26}$

a) $U_n = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}$

$U_n = \frac{2}{15} P_{n-1} - \frac{6}{15 \times 13}$

$U_n = \frac{2}{15}\left(P_{n-1} - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15} U_{n-1}$

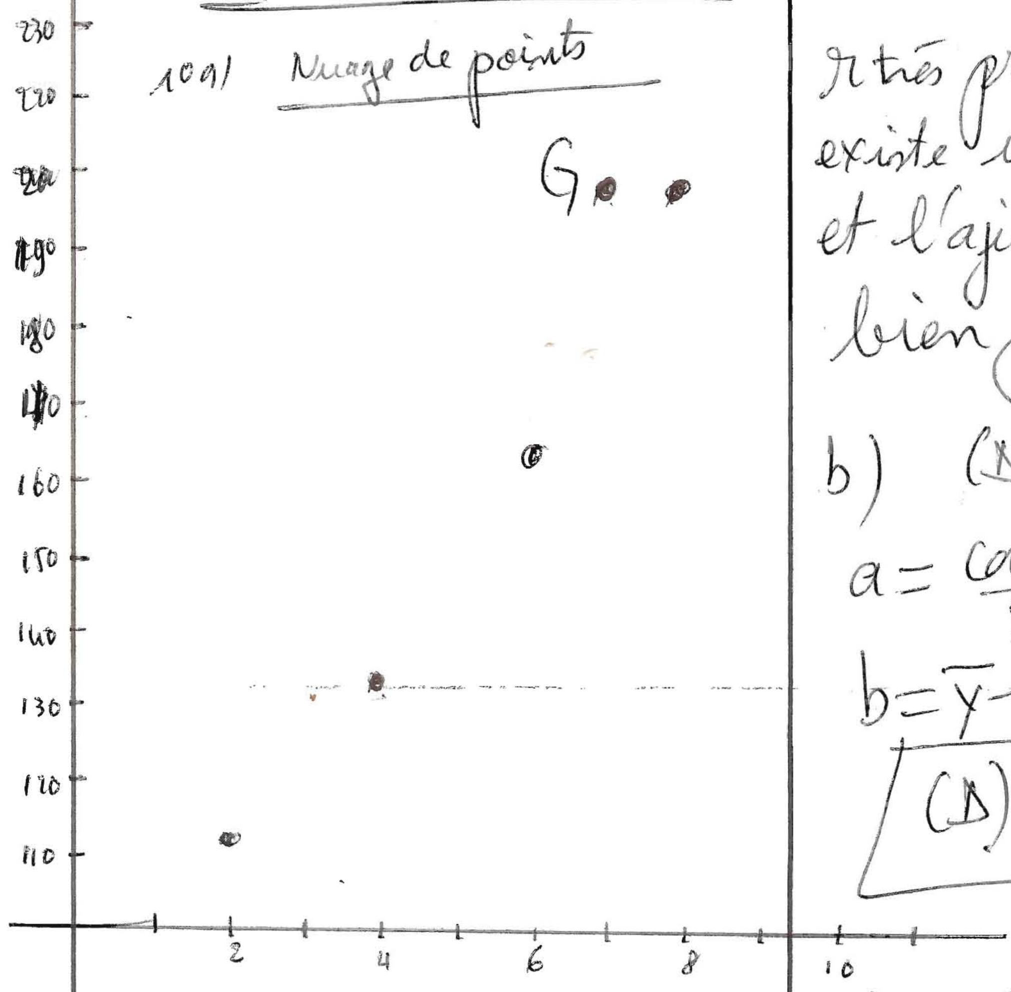
La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{15}$ et de premier terme $U_1 = \frac{7}{26}$

b) $U_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$

$\boxed{P_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}}$

EXERCICE 2

1°a) Nuage de points



b) Cela suggère un ajustement graphique car les points sont presque alignés.

c) $\bar{x} = 7$ $\bar{y} = 197$ donc $G(7 ; 197)$.

2° a) $V(x) = 11,67$; $V(y) =$
$V(y) = 4839,33$
$cov(x,y) = 233,33$

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} \simeq 0,98$$

(2)

r très proche de 1 donc il existe une forte corrélation et l'ajustement affine est bien justifiée.

b) (Δ) $y = ax+b$ avec
$a = \frac{cov(x,y)}{V(x)} \simeq 20$ et
$b = \bar{y} - a\bar{x} = 57$ et

$$\boxed{(\Delta)\ y = 20x + 57}$$

c) en 1988, le rang est $x=18$ et $y = 20 \times 18 + 57 = 417$.
Par conséquent la consommation en 1988 peut être estimée d'après ce modèle à l'indice 417, base 100 en 1970.

3°

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	112	136	167	199	252	316
ax_i+b	97	137	177	217	257	297
$y_i-(ax_i+b)^2$	225	1	100	324	25	361

b) $S = 1036$

c) $S' = 1049,5526$ et $S < S'$

La methode des moindres carrés est plus adaptée.

Problème

Partie A

$g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

1° a) $D_g =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1} x-1 = -2 \\ \lim\limits_{x \to -1} x+1 = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1} x-1 = -2 \\ \lim\limits_{x \to -1} x+1 = 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

b) Les droites $x = -1$ et $y = 1$ sont des asymptotes à la courbe (Γ) de g.

2° a) g est dérivable sur D_g et $g'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

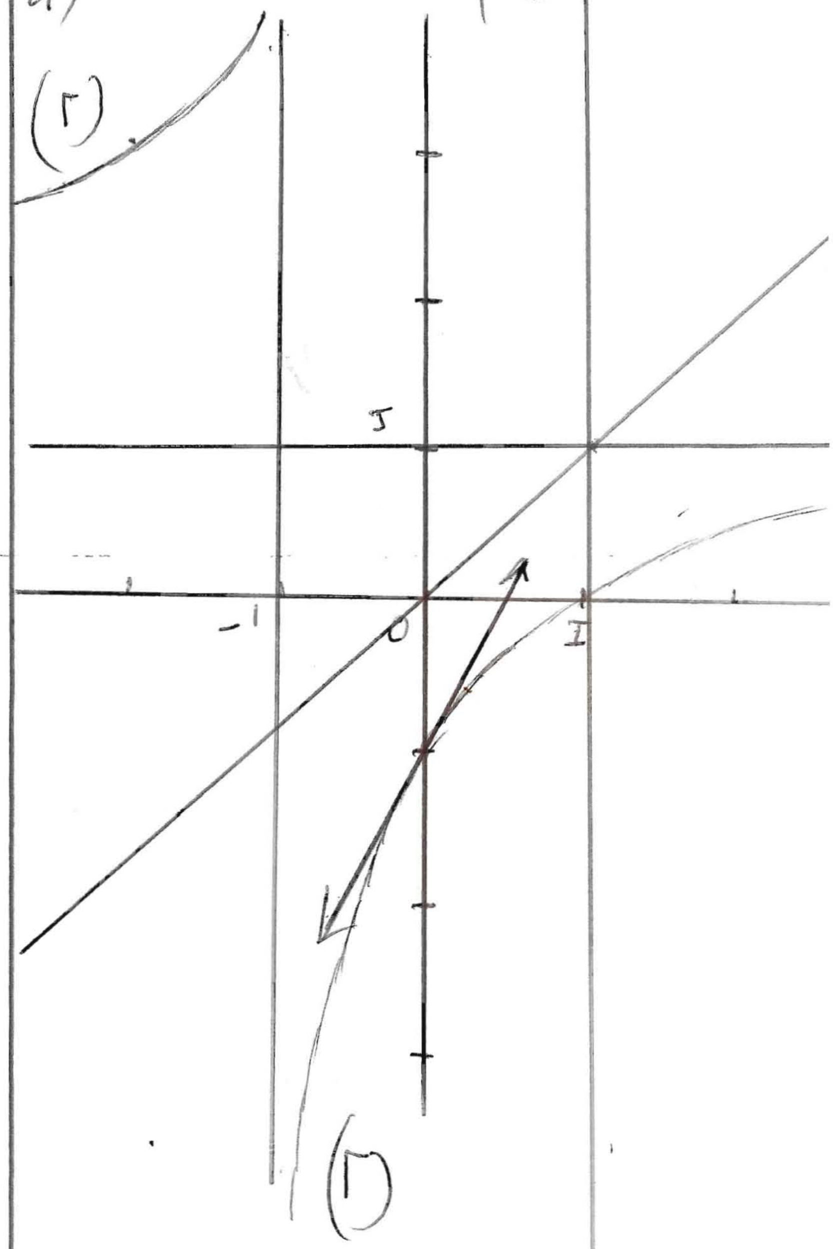
b) $g' > 0$ et g est croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$+$	||	$+$	
g	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

c) (T) $y = 2x - 1$

d) construction de (Γ)



3° a) $1 - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x+1-2}{x+1} = \dfrac{x-1}{x+1} = g(x)$

$G(x) = x - 2\ln|x+1|$ et G est une primitive de g sur $[0 ; 1]$

$K = \int_0^1 g(x)\,dx = [G]_0^1$

$\boxed{K = 1 - 2\ln 2}$

Partie B (4)

1° a) Signe de $g(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	‖ $-$	0	$+$

sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ $g>0$

sur $]-1;1[$ $g<0$

$g(1)=0$

$x\in D_f \Leftrightarrow g(x)>0$

$$\boxed{D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[}$$

b) $\forall x\in D_f$ $-x\in D_f$ et

$f(-x)=-x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$

$f(-x)=-x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$f(-x)=-x+\ln\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

$f(-x)=-x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$f(-x)=-f(x)$ donc f est impaire et le point $O(0,0)$ est un centre de symétrie pour (C). Ainsi on peut étudier f sur $]1;+\infty[$.

2 a) f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;-1[$ et

$f'(x)=1+\frac{g'(x)}{g(x)}=1+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$

$f'(x)=1+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-1+2}{(x+1)(x-1)}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}}$$

b) $f'(x)>0$ et f est croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.

2 a) $\lim\limits_{x\to1}x=1$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$

f étant impaire $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

f étant impaire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

3° Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$				$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$				$-\infty \nearrow +\infty$

4° a) $f(x) - x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ car

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$

donc la droite (D) $y = x$ est une asymptote à (C).

b) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \geq 0 \iff \frac{x-1}{x+1} \geq 1$

$\iff \frac{-2}{x+1} \geq 0 \iff x+1 \leq 0$

$\iff x \leq -1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$				$-$

sur $]-\infty; -1[$ (C) au dessus de (D)

sur $]1; +\infty[$ (C) au dessous de (D).

c) les droites $x = -1$ et $x = 1$ sont aussi des asymptotes à (C).

5° Voir figure.

c) $x > 1$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-1)\ln(x-1) - (x+1)\ln(x+1)$

a) F est dérivable sur $]1; +\infty[$

et $F'(x) = x + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$F'(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = f(x)$

donc F est une primitive de f.

b) $\mathcal{A} = \int_2^3 f(x)\,dx = \left[F\right]_2^3$ u.a

$\mathcal{A} = F(3) - F(2)$

$\mathcal{A} = \left(\frac{5}{2} + 3\ln 3 - 6\ln 2\right)$ u.a.

or u.a $= 4\,cm^2$ et on a en cm^2

$\mathcal{A} = 4\left(\frac{5}{2} + 3\ln 3 - 6\ln 2\right) cm^2$