Correction BAC BLANC

Exercice 1

1°/ a/ Vérifions que $(-1;-1)$ est solution de (E).

On remplace p par -1 et q par -1 dans (E) et on obtient : $11p - 7q = -11 + 7 = -4$

Donc $(-1;-1)$ est une solution de (E).

b/ Résolvons (E)

$$\begin{cases} 11p - 7q = -4 \\ 11(-1) - 7(-1) = -4 \end{cases} \iff 11(p+1) - 7(q+1) = 0$$

$$\iff 11(p+1) = 7(q+1) \quad (*)$$

Donc 11 divise $7(q+1)$. Comme 11 et 7 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 11 divise $q+1$.

Par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $q+1 = 11k$

On obtient $q = -1 + 11k$.

En remplaçant dans la relation $(*)$, q par $-1 + 11k$ on obtient $p = -1 + 7k$.

On vérifie que $11(-1+7k) - 7(-1+11k) = -4$

d'où $S = \{(-1+7k ; -1+11k), k \in \mathbb{Z}\}$.

2°/ a/ Résolvons l'équation, $n \in \mathbb{Z}$, $2n \equiv 3\ [7]$

Calculons $2n$ suivant les classes de congruence modulo 7 :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$2x \equiv$	0	2	4	6	1	3	5

Par conséquent : $2x \equiv 3\ [7] \iff x \equiv 5\ [7]$

$\iff \exists\, s \in \mathbb{Z} \ / \ x = 5 + 7s$

$$\boxed{S = \{ 5+7s \ , \ s \in \mathbb{Z} \}}$$

Résolvons pour $x \in \mathbb{Z}$, $9x \equiv 4\ [11]$

Calculons $9x$ suivant les classes de congruence modulo 11.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$9x \equiv$	0	9	7	6	3	1	10	8	6	4	2

Par conséquent $9x \equiv 4\ [11] \iff x \equiv 9\ [11]$

$\iff \exists\, t \in \mathbb{Z} / \ x = 9 + 11t$

$$\boxed{S = \{ 9+11t \ , \ t \in \mathbb{Z} \}}$$

b/ ~~Ré~~ Déduisons les solutions du système.

Les solutions du système sont les nombres qui sont à la fois solutions de (E_1) et de (E_2)

Cela revient à résoudre $\begin{cases} x = 5 + 7s \\ x = 9 + 11t \end{cases}, (s,t) \in \mathbb{Z}^2$

Ce système se ramène à $\begin{cases} 11t - 7s = -4 \\ x = 5 + 7s \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = -1 + 7k \text{ et } s = -1 + 11k, \ k \in \mathbb{K} \\ x = 5 + 7s \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $x = -2 + 77k$.

Les solutions du système sont les nombres entiers relatifs x qui s'écrivent : $x = -2 + 77k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{-2 + 77k,\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Exercice 2

1°/ Justifions que $J_0 = \frac{\pi}{4}$

Posons $x = \sin t$ pour $x = 0$, $t = 0$

Pour $x = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$.

$dx = \cos t \, dt$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{J_0 = \frac{\pi}{4}}$$

2°/ * Calculons J_1

$J_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \quad = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$

$\boxed{J_1 = \frac{1}{3}}$

\# Déduisons la valeur de I_1

$I_1 = \int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x^2}\,dx = J_0 - J_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$

$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}}$

Posons $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ et (C_f) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J).

f est positive sur $[0,1]$ donc I_1 est l'aire en unité d'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

3°) a) Etudions le sens de variation de la suite (J_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}$

$\forall x \in [0,1]$, $x^n(x-1)\sqrt{1-x^2} \leq 0$ car $x-1 \leq 0$ et

$x^n \geq 0$, $\sqrt{1-x^2} \geq 0$.

D'après la positivité de l'intégrale

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} \leq J_n$

Donc la suite (J_n) est décroissante.

b/ Déduisons que (J_n) et (I_n) convergent

* $\forall x \in [0,1]$, $x^n \sqrt{1-x^2} \geq 0$ donc d'après la positivité de l'intégrale, $J_n \geq 0$

La suite (J_n) ~~étant~~ décroissante et minorée par 0, converge.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$

$= J_0 - J_n$

La suite (I_n) est donc convergente car (J_n) l'est.

4°/ a/ Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$

Donc $0 \leq x^n \sqrt{1-x^2} \leq x^n$ car $x^n \geq 0$

les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sont continues sur $[0,1]$. En intégrant sur $[0,1]$, la double inégalité précédente on a :

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx .$$

b/ Déduisons $\lim_{n \to +\infty} J_n$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

* $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx \iff 0 \leq J_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$\iff 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

D'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = 0}$

* $\lim_{n \to +\infty} I_n = J_0$ car $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{4}}$

5°/ a/ Démontrons que $\forall\, n \geq 3$,

$$(n+2) J_n = (n-1) J_{n-2} .$$

$$J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Posons $u(x) = x^{n-1}$ donc $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$

$v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ donc $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$

$$J_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{n-1}{3}\left[J_{n-2} - J_n\right]$$

$$3J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$$

$$\boxed{(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}} \quad (\forall n \geq 3).$$

* Pour $n=2$, $J_2 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}$

Posons $u_1(x) = x$ $\quad u_1'(x) = 1$

$v_1'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ $\quad v_1(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$

$$J_2 = \left[-\frac{1}{3}x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{3}(J_0 - J_2)$$

$4J_2 = J_0$. ~~Par~~ Conséquent la formule est vraie pour $n=2$.

b/ Démontrons que pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$J_{2p} = \frac{1\times 3\times \cdots \times (2p-1)}{4\times 6\times \cdots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4}$$

$\forall n \geq 2,\quad J_n = \dfrac{n-1}{n+2} J_{n-2}$

On a donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $2p \geq 2$ et

$$J_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2} J_{2p-2}$$

Par itération on :

$$J_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2} J_{2p-2}$$

$$J_{2p-2} = \frac{2p-3}{2p} J_{2p-4}$$

$$\vdots$$

$$J_4 = \frac{3}{6} J_2$$

$$J_2 = \frac{1}{4} J_0$$

En multipliant membre à membre ces égalités et après simplification on a :

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-3) \times (2p-1)\ J_0}{4 \times 6 \times \dots \times 2p \times (2p+2)}$$

$$= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{4 \times 6 \times \dots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4}$$

$\forall n \geq 2, \quad J_n = \frac{n-1}{n+2} J_{n-2}$

On a donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $2p \geq 2$ et

$$J_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2} J_{2p-2}$$

Par itération on :

$$J_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2} J_{2p-2}$$

$$J_{2p-2} = \frac{2p-3}{2p} J_{2p-4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$J_4 = \frac{3}{6} J_2$$

$$J_2 = \frac{1}{4} J_0$$

En multipliant membre à membre ces égalités et après simplification on a :

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-3) \times (2p-1)\, J_0}{4 \times 6 \times \cdots \times 2p \times (2p+2)}$$

$$= \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{4 \times 6 \times \cdots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4}$$

* De même pour $p \in \mathbb{N}^*$, par itération

$$J_{2p+1} = \frac{2p}{2p+3} J_{2p-1}$$

$$J_{2p-1} = \frac{2p-2}{2p+1} J_{2p-3}$$

$$\vdots$$

$$J_5 = \frac{4}{7} J_3$$

$$J_3 = \frac{2}{5} J_1 \quad \text{et} \quad J_1 = \frac{1}{3}.$$

En multipliant membre à membre les égalités et après simplification on a :

$$J_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2p}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots (2p+3)}$$

PROBLEME

Partie A

1°) a) Montrons que la fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$.

$x \mapsto x$ est continue sur $]0,+\infty[$

$x \mapsto -\frac{1}{nx}$ est continue sur $]0,+\infty[$, fonction rationnelle

Donc $x \mapsto e^{-\frac{1}{nx}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

Et $x \mapsto x e^{-\frac{1}{nx}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

Etudions la continuité de f_n en 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \end{array}\right\} \text{donc}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$$

D'où f_n est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Etudions la dérivabilité de f_n en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$$

D'où f_n est dérivable en 0 et $f_n'(0) = 0$

c) Calculons $f_n'(x)$ pour $x > 0$.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\frac{1}{nx}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Donc $x \mapsto e^{-\frac{1}{nx}}$ est dérivable sur

$]0, +\infty[$.

Donc f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$f_n'(x) = e^{-\frac{1}{nx}} + \frac{1}{nx} e^{-\frac{1}{nx}}$$

$$\boxed{f_n'(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right) e^{-\frac{1}{nx}}}$$

Pour $x \in]0, +\infty[$, $1 + \frac{1}{nx} > 0$ et $e^{-\frac{1}{nx}} > 0$

donc $f_n'(x) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2°/ a/ Déterminons la limite de f_n en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{nx} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} e^{x} = 1 \end{array}\right\} \text{donc} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{nx}} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{D'où}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$$

b/ Dressons le tableau de variation de g.

g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$g'(x) = -e^{-x} + 1$$

Résolvons l'inéquation $-e^{-x} + 1 > 0$

$e^{-u} < 1$

$-u < 0 \Rightarrow u > 0$

donc pour $u \in [0, +\infty[$, $g'(u) \geq 0$

et g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{u \to +\infty} -u = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{array}\right\}$ Donc $\lim\limits_{u \to +\infty} e^{-u} = 0$

$\lim\limits_{u \to +\infty} u - 1 = +\infty$

D'où $\lim\limits_{u \to +\infty} g(u) = +\infty$

$g(0) = 1 - 1 = 0$

Tableau de variation.

u	0	$+\infty$
$g'(u)$	+	
$g(u)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Déduisons que $\forall u \geq 0$, $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$

Pour $u \in [0, +\infty[$, $u \geq 0$

$g(u) \geq g(0)$ car g est strictement croissante sur $[0, +\infty$

De plus $g(0) = 0$

Donc $g(u) \geq 0$

$$e^{-u} - (1-u) \geq 0$$

$$e^{-u} - 1 + u \geq 0$$

$$u \geq 1 - e^{-u}$$

et pour $u \geq 0$, $1 - e^{-u} \geq 0$ $\left(g'(u) \geq 0\right)$

donc $\boxed{0 \leq 1 - e^{-u} \leq u}$ (1)

c) Soit $t \geq 0$.

Les fonctions $u \mapsto 1 - e^{-u}$ et $u \mapsto u$ sont continues sur $[0, +\infty[$.

En intégrant sur $[0, t]$ l'encadrement (1) on a :

$$0 \leq \int_0^t (1 - e^{-u})\,du \leq \int_0^t u\,du$$

$$0 \leq \left[u + e^{-u}\right]_0^t \leq \left(\frac{1}{2}u^2\right)_0^t$$

$$0 \leq t + e^{-t} - 1 \leq \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{0 \leq e^{-t} - (1-t) \leq \frac{t^2}{2}} \quad (2)$$

d) Démontrons que pour $x > 0$,

$$0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$

D'après c) pour tout $t>0$, $0 \leq e^{-t} - (1-t) \leq \frac{t^2}{2}$

or pour $x>0$, $\frac{1}{nx} > 0$.

En remplaçant t par $\frac{1}{nx}$ dans (2)

on a :

$$0 \leq e^{-\frac{1}{nx}} - \left(1 - \frac{1}{nx}\right) \leq \frac{1}{2n^2x^2}$$

Et en multipliant cette double inégalité

par x on a :

$$0 \leq x e^{-\frac{1}{nx}} - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$$

$$\boxed{0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}} \quad (3)$$

Déduisons que la droite (D_n) : $y = x - \frac{1}{n}$

est asymptote à la courbe (C_n)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$. D'après le

Théorème des gendarmes, ~~lim~~

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) = 0$$

d'où (D_n) est asymptote à (C_n) en $+\infty$.

Précisons la position de (C_n) par rapport à

(D_n)

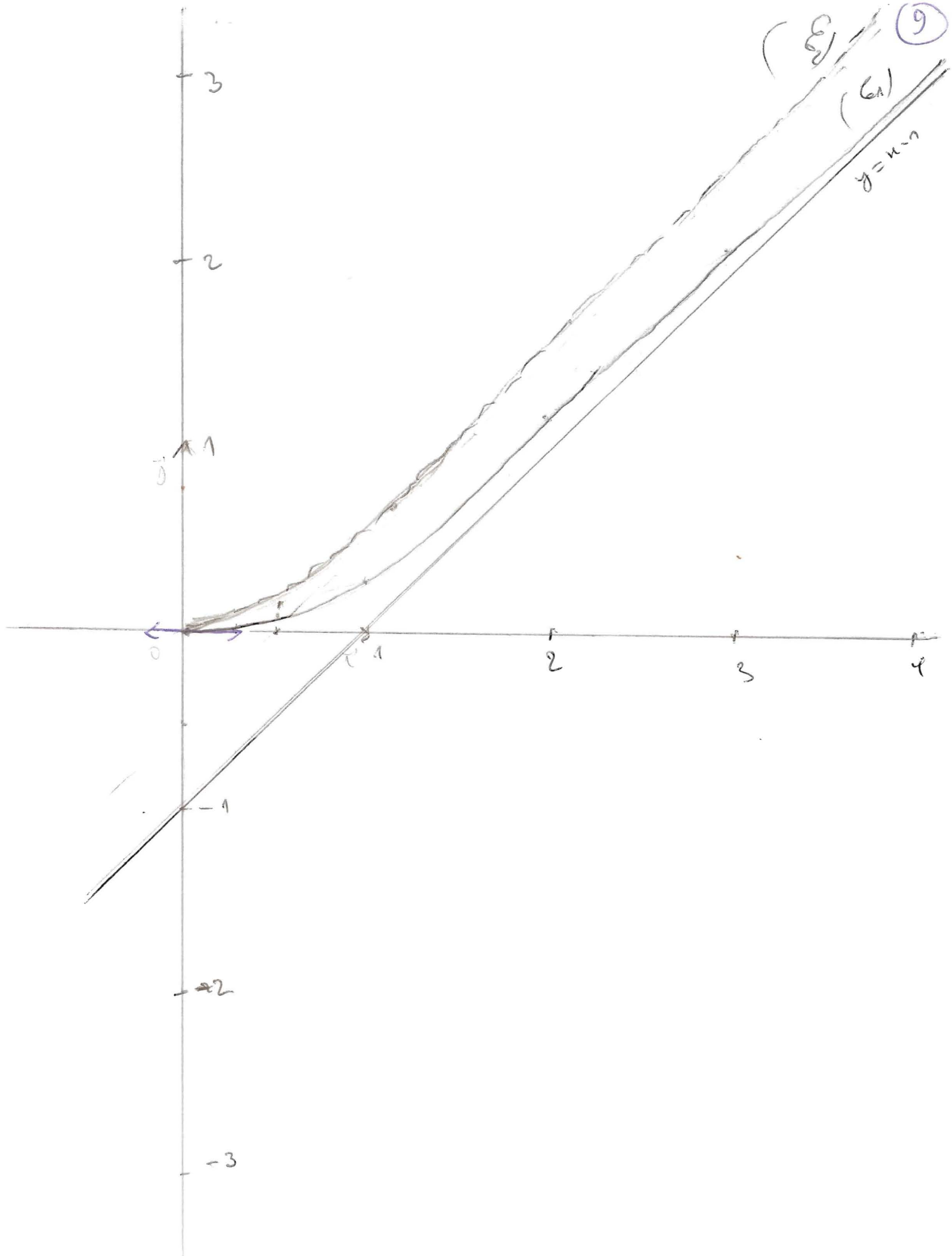
On a, pour $x > 0$, $0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right)$

Donc la courbe (C_n) est au-dessus de (D_n).

3°/ a/ Donnons le tableau de variation de f_n.

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b/ Traçons (C_1) et (D_1). (Voir figure)



(9)
$(\mathcal{E})$
(C_1)
$y = x - 1$
3
2
1
0
1
2
3
4
-1
-2
-3

c) Démontrons que pour $n>0$, (C_n) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$.

Soit $M\binom{x}{y}$ un point de (C_1) et $M'\binom{x'}{y'}$ son image par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$.

on a : $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{n}\overrightarrow{OM}$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{n}x \\ y' = \frac{1}{n}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = nx' \\ y = ny' \end{cases}$$

$$M \in (C_1) \iff y = xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$\iff ny' = nx'e^{-\frac{1}{nx'}}$$

$$\iff y' = x'e^{-\frac{1}{nx'}}$$

$$\iff M' \in (C_n).$$

d'où l'image de (C_1) par $h(O;\frac{1}{n})$ est (C_n).

Construction de (C_2) voir figure.

4) Pour $n > 0$, on a : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

a/ * Montrons que pour tout $x \in [0,1]$,

$f_n(x) \leq x$

Pour $x \in]0,1]$, $\frac{1}{nx} \geq 0$ donc $-\frac{1}{nx} \leq 0$

$e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1$ (car exp est croissante)

$x e^{-\frac{1}{nx}} \leq x$ (car $x \geq 0$)

De plus $f_n(0) = 0$ donc :

Pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq x$

* Déduisons que pour tout entier $n \geq 1$,

$I_n \leq \frac{1}{2}$.

En intégrant l'inégalité précédente sur $[0,1]$

on a : $\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$

$I_n \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$ donc $\boxed{I_n \leq \frac{1}{2}}$

b) En utilisant la relation (3), établissons que $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$

D'après (3) $x - \frac{1}{n} \leq f_n(x)$

$x \mapsto x - \frac{1}{n}$ et $x \mapsto f_n(x)$ sont continues sur $[0,1]$.

En intégrant l'inégalité précédente sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{n}\right) dx \leq \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}x\right]_0^1 \leq I_n$$

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n}$$

c) Déterminons la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$: on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

D'après le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}}$$

Partie B

1°) Démontrons que, pour tout $n > 0$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une seule solution.

f_n est dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f_n(]0;+\infty[) =]0,+\infty[$

De plus $1 \in]0,+\infty[$, d'où l'équation $x e^{-\frac{1}{nx}} = 1$ admet une solution unique dans $]0,+\infty[$.

2) Démontrons que α_n est solution de l'équation $x \ln x = \frac{1}{n}$

$$f_n(\alpha_n) = 1 \iff \alpha_n e^{-\frac{1}{n\alpha_n}} = 1$$

$$\iff e^{-\frac{1}{n\alpha_n}} = \frac{1}{\alpha_n} \quad (\alpha_n \neq 0)$$

$$-\frac{1}{n\alpha_n} = -\ln \alpha_n$$

$\frac{1}{n} = \alpha_n \ln \alpha_n$ et α_n est solution de l'équation $x \ln x = \frac{1}{n}$.

3) $h : [1;+\infty[$ par $h(x) = x \ln x$

a) Etudions le sens de variation de h

$x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivable sur $[1;+\infty[$. Donc h est dérivable sur

$[1;+\infty[$ et $\forall x \in [1;+\infty[$

$h'(x) = \ln x + 1$. De plus, pour $x \geq 1$ $\ln x \geq 0$

donc $h'(x) > 0$ et on en déduit que

h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) Prouvons que $1,76 < \alpha_1 < 1,77$

Pour cela calculons $h(1,76)$ et $h(1,77)$

$h(1,76) \simeq 0,994$ et $h(1,77) \simeq 1,01$

$h(1,76) < 1 < h(1,77)$

d'où $1,76 < \alpha_1 < 1,77$ car h est croissante

et α_1 est l'unique solution de l'équation

$h(x) = 1$.

c) Prouvons que la suite (α_n) ~~est~~ décroissante

Pour $n > 0$, $n+1 \geq n$

donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ or $h(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

et $h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

d'où $h(\alpha_{n+1}) \leq h(\alpha_n)$

et $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ (car h est croissante sur $[1;+\infty[$

donc (α_n) est décroissante.

4°/ a/ Justifions que la suite (α_n) converge

D'après Partie B 1°/ pour $n > 0$, $\alpha_n > 0$

donc la suite (α_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge vers α.

La suite (α_n) est à valeurs dans $[1 ; +\infty[$

car pour $n > 0$, α_n est l'unique solution de l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$.

$\alpha_n \geq 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n \geq 1$

d'où $\alpha \geq 1$.

b/ Démontrons que $h(\alpha) = 0$

On a : $h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} h(\alpha_n)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = h(\alpha)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} h(\alpha_n) = h(\alpha)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

d'où $h(\alpha) = 0$

Déduisons α

$h(x) = 0 \iff x \ln x = 0$

$x = 0$ ou $\ln x = 0$

$\boxed{x = 1}$