# BAC FRANÇAIS S GABON session 97

## EXERCICE I (4 points)

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher.
$U_1$ contient n boules blanches et 3 boules noires ( n étant un entier supérieur ou égal à 1 ).
$U_2$ contient deux boules blanches et une boule noire.
On tire au hasard une boule de $U_1$ et on la met dans $U_2$, puis on tire au hasard une boule de $U_2$ et on la met dans $U_1$; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
1°) On considère l'événement A: « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune avec leur configuration de départ ».
a) Montrer que la probabilité de l'événement A peut s'écrire $p(A)= \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.
b) Déterminer la limite de p(A) quand n tend vers $+\infty$.
2°) On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne $U_2$ contient une seule boule blanche ».
Vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrire $p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$.
3°) Un joueur mise 20 francs et effectue l'épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans $U_2$ :
- si $U_2$ contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs;
- si $U_2$ contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs;
- si $U_2$ contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10. Dans la suite, on considérera n > 10 et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur ( par exemple, si après l'épreuve, l'urne $U_2$ contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$ ).
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.
d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne $U_1$ contient au moins 25 boules blanches.

## EXERCICE II ( 5 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O, unité graphique cinq centimètres, on donne les points A, B, C d'affixes respectives : i , $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}+i$ ; on appelle I, J, K les milieux respectifs des segments [ OB ] , [ AC ] et [ BC ] et s la similitude directe qui transforme A en I et O en B.
1°) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.
b) Donner l'écriture complexe de s.
c) En déduire l'affixe $\omega$ du centre $\Omega$ de s. Placer le point $\Omega$ dans P.
d) Quelle est l'image par s du rectangle AOBC ?
2°) on considère la transformation $s^2 = s \circ s$.
a) Quelles sont les images de points 0, B et A par $s^2$ ?
b) Montrer que $s^2$ est une similitude dont on précisera le centre et le rapport.
c) En déduire que les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.
3°) On définit la suite des points $A_n$ de la façon suivante :
$A_0 = A$ et pour tout entier n, $A_{n+1} = s(A_n)$.
a) On précisera les points $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sur la figure.
b) On note $u_n$ la longueur du segment [ $A_n A_{n+1}$ ];
- Exprimer $u_n$ en fonction de $u_{n-1}$.
- Calculer $u_0$ et en déduire $u_n$ en fonction de n.
- Calculer $S_n = u_0 + u_1 + .... + u_n$ en fonction de n.
- Quelle est la limite de $S_n$ quand n tend vers $+\infty$ ?

## PROBLEME ( 11 points)

### Partie A:

Soit f la fonction définie pour tout s réel différent de 1 par :
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}$$
On appelle $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O.
1°) a) Etudier les limites de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x rend vers 1. Interpréter graphiquement ces résultats.
b) Vérifier que pour tout x différent de 1, f(x) peut s'écrire : $f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}$. En déduire alors la limite de f(x) quand x tend vers $-\infty$.
2°) a) Montrer que $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.
b) Etudier les variations de f.
c) Montrer que f admet un minimum que l'on précisera quand x < 1.

### Partie B:

On considère l'équation différentielle : (E) : $y'' + 2y' + y = 0$, où y est une fonction numérique deux fois dérivables sur IR.
1°) Résoudre (E).
2°) On considère les solutions de (E) dont la courbe représentative passe par $A(0; \frac{1}{2})$.
a) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme : $(ax + \frac{1}{2})e^{-x}$, où a est un réel.
b) On note alors $h_a(x) = (ax + \frac{1}{2})e^{-x}$. Faire l'étude du sens de variation de $h_a$ en fonction du réel a et montrer que pour a différent de zéro, $h_a$ admet un extremum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de a.
c) On note ($C_a$) la courbe représentative de $h_a$ et $S_a$ le point de ($C_a$) correspondant à l'extremum de $h_a$ ; vérifier que pour tout réel a différent de zéro, $S_a$ est un point de la courbe $\Gamma$ qui a été définie dans la partie A.

### Partie C:

Sur la feuille donnée en annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les courbes ($C_a$) pour $a = \frac{1}{4}$ et pour quatre valeurs de a : -2 , 0 , 1 et 2.
1°) Sur cette feuille annexe, construire $\Gamma$ et ses droites asymptotes.
2°) Pour chacune des courbes ($C_a$) tracées, autres que $(C_{\frac{1}{4}})$, déterminer la valeur correspondante de a en indiquant la méthode utilisée.

### Partie D:

Dans cette partie, on considère la fonction $h_a$ obtenue pour $a = \frac{1}{4}$.
Soit k un nombre réel supérieur à -2; on appellera $D_k$ l'ensemble des points du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(C_{\frac{1}{4}})$ et la droite d'équation x = k.
1°) Exprimer $I = \int_{-2}^{k} h_{\frac{1}{4}}(t)\,dt$ en fonction de k; on pourra utiliser une intégration par parties ou se servir de l'équation différentielle (E).
2°) Soit A(k) la mesure en unités d'aire de l'aire $D_k$. Quelle est la limite de A(k) quand k tend vers $+\infty$ ?