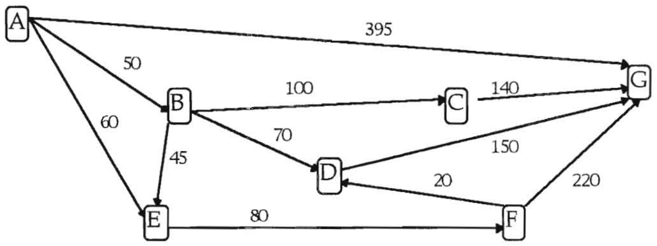
BAC C GABON session 99

EXERCICE I (5 points)



Un voyageur veut se rendre de la ville A (départ) à la ville G (arrivée). Le schéma ci-dessus donne les divers chemins possibles, à sens unique, avec la distance en kilomètres correspondante du parcours entre deux villes, et sens de parcours.
Exemple (A, B, C, G) est un itinéaire possible.

1°) a) Combien y a-t-il d'itinéaires possibles ?

b) Ranger les du plus court au plus long, en précisant chaque fois la distance correspondante.

c) Soit X l'événement « le voyageur choisit le trajet le plus court », Y l'événement « le voyageur choisit le trajet le plus long », Z lo'événement « le voyageur ne choisit ni le plus court, ni le plus long »

On suppose qu'un voyageur choisit son chemin de façon équiprobable.
Calculer les probabilités des événements X, Y, Z que l'on notera p(X), p(Y), p(Z).

2°) a) Sachant que la probabilité de faire un accident est de 0,2 sur le trajet le plus court, 0,02 sur le trajet le plus long, de 0,1 sur le trajet intermédiaire, calculer sous forme d'une fraction irréductible, pour un voyageur quittant la ville A, la probabilité d'arriver sans accident à la ville G.

b) Le voyageur est arrivé sans accident à destination. Montrer que la probabilité que ce voyageur ait choisi le tyrajet le plus court est égale à $\frac{20}{159}$.

3°) On suppose que 7 voyageurs sont partis de A et sont arrivés sans accident à destination.

a) Quelle est la probabilité à 10-4 près, pour que 4 voyageurs aient choisi le trajet le plus court.

b) Quelle est la probabilité à 10-4 près, pour qu'au moins un voyageur aient choisi le trajet le plus long.

EXERCICE II (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD direct de centre O, E le point de [AB] tel que $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, et F le point de [BC] tel que $\vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{BC}$. On place les points I et K milieux respectifs de [OA] et [OD]. On désigne par r le quart de tour direct de centre O et h l'homothétie de centre B et de rapport 3. Enfin soit s la transformation définie par s = hor (composée de h et de r).

1°) a) Montrer que s est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport.

b) Déterminer les images de I et E par s.

c) En déduire que (KC) et (IE) sont orthogonales et que KC = 3 IE

2°) Soit G le symétrique de O par rapport à D. Montrer que $(\vec{CG}, \vec{CK}) = (\vec{EO}, \vec{EI})$.

3°) Soit Ω le centre de s. Montrer que $(\vec{\Omega O}, \vec{\Omega G}) = (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.
En déduire une construction de Ω, et construire ce point.

4°) Le plan complexe est rapporté au repère (A, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$).

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

b) Déterminer l'affixe ω de Ω.

PROBLEME (11 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x + 2 - \ln(1 + e^x)$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, I, J), l'unité graphique étant : 1 cm.

Partie A : étude de la fonction f

1°) Calculer la limite de f en $-\infty$.

2°) Montrer que $f(x) = 2 - \ln(1 + e^{-x})$ pour tout x de IR, puis en déduire la limite de f en $+\infty$.

3°) Montrer que la droite D d'équation y = x + 2 est une asymptote à (C) puis étudier la position de (C) par rapport à D.

4°) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution réelle unique α.

b) Calculer la valeur exacte de α puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

5°) Déterminer l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse α.

6°) Construire (C), D et T dans le repère (O, I, J).

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+1} + \dots\dots + \frac{1}{e^n+1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{e^p+1}$$

1°) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2°) Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur IR.

3°) a est un réel quelconque. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction f respectivement sur [a- 1, a], puis sur [a, a + 1], et en utilisant la question précédente, montrer que : $f(a+1) - f(a) \leq f'(a) \leq f(a) - f(a-1)$

4°) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a : $f(n+1) - f(1) \leq u_n \leq f(n) - f(0)$

5°) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

6°) Soit ℓ la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $\ln(1+e) - 1 \leq \ell \leq \ln 2$.

Partie C : étude d'une fonction intégrale

Soit F la fonction définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$.

1°) Montrer que $F(x) \geq 0$ pour tout réel $x \geq \alpha$.

2°) Etudier les variations de F sur $[\alpha, +\infty[$.

3°) a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.

b) En déduire que $f(x) \geq 2 - \frac{1}{e^x}$ pour tout réel x.

4°) a) Montrer que $F(x) \geq 2x - \frac{1}{e^\alpha}$ pour tout $x \geq \alpha$.

b) En déduire la limite de F(x) quand x tend vers $+\infty$.

5°) Dresser le tableau de variation de F.