BERENGER

BAC C GABON
session 98

EXERCICE I (5 points)

Dans le plan on considère on considère un triangle ABC. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [BA]. On pose BC = a, AC = b et AB = c.

1°) a) Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

b) Démontrer que : $4\,\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}^2$

c) En déduire que les droites (BB') et (CC') sont perpendiculaires si et seulement si la relation (1) : $b^2 + c^2 = 5a^2$ est vérifiée.

d) Démontrer que si les médianes (BB') et (CC') sont perpendiculaires, alors $AA' = \frac{3}{2}a$.

2°) Dans cette question on suppose satisfaite la relation (1) : $b^2 + c^2 = 5a^2$.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

b) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2$; puis vérifier que A appartient à (F).

3°) Application

a) On donne a = 6 cm ; b = 9 cm et c = $3\sqrt{11}$ cm.
Vérifier que la relation (1) est satisfaite ; puis en déduire la construction d'un triangle ABC répondant à ces données. Expliquer la construction.

b) Représenter dans ce cas les ensembles (E) et (F).

EXERCICE II (5 points)

Partie A:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1 cm), on considère le point G_0 d'affixe $z_0 = re^{i\theta}$, où r et θ sont deux nombres réels fixés avec r > 0.
Soit M_0 le point d'affixe Z_0 tel que le triangle OG_0M_0 soit équilatéral direct. On désigne par G_1 le centre de gravité du triangle OG_0M_0.

1°) a) Démontrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Exprimer Z_0 en fonction de z_0.

c) Démontrer que le point G_1 d'affixe z_1 est l'image du point G_0 par la similitude directe S de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2°) On définit dans le plan P les deux suites de points $(M_n)_{n\geq 0}$ et $(G_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout entier naturel n, le triangle OG_nM_n soit un triangle équilatéral direct de centre de gravité G_{n+1}.

a) Pour tout entier n, on désigne par z_n l'affixe de G_n et Z_n l'affixe de M_n. Démontrer que : $G_{n+1} = S(G_n)$ et exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

b) Pour tout entier n, exprimer z_n en fonction de n, r et θ.

3°) On suppose dans cette question que $z_0 = 8\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Placer les points G_0, G_1, G_2, G_3 et G_4.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, on considère la suite de points $(K_n)_{n\geq 0}$ telle que $\overrightarrow{G_nK_n} = \overrightarrow{OG_n} \wedge \overrightarrow{OG_{n+1}}$, où les points G_0, G_1, ..., G_n, ... sont ceux de la partie A situés dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) a) Montrer que $G_0K_0 = \frac{r^2\sqrt{3}}{6}$.

b) En déduire l'aire du triangle OG_0G_1 en fonction de r.

2°) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = G_nK_n$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Puis en déduire u_n en fonction de r et de n.

3°) Pour tout n, on note S_n la somme des aires des triangles OG_0G_1 ; OG_1G_2 ; ... ; $OG_{n-1}G_n$. Exprimer S_n en fonction de r et n et calculer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

PROBLEME (10 points)

Le problème a pour objet l'étude d'une suite de fonctions, d'une suite d'intégrales, puis la recherche d'une valeur approchée d'une équation du type f(x) = k.

Partie A: étude d'une suite de fonctions

On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour n entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1°) a) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$ (pour la limite en $+\infty$, on posera X = x + 2).

b) Etudier suivant la parité de n, la limite de f_n en -2.

2°) a) Calculer $f'_n(x)$, puis étudier son signe suivant la parité de n.

b) Dresser le tableau de variation de f_n.

3°) a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A.

4°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout réel x différent de - 2, on a : $f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

c) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2).
Représenter graphiquement (C_1) et (C_2).

Partie B : étude d'une suite d'intégrales.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$, pour tout entier naturel n non nul.

1°) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout n non nul on a : $u_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ?

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \frac{1-2^{-n+1}}{n-1}e$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3°) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $n\,u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{e}{2^n}$.

b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4°) b) de la partie A.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}dx = 1$.

Partie C : recherche de la solution positive de l'équation g(x) = e.

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = f_1(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe (C_1). Justifier la construction.

2°) On appelle Φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par:

$$\Phi(x) = 1 + \ln(1 + x)$$

a) Démontrer que l'équation Φ(x) = x admet une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3].

b) Démontrer que pour x positif, l'équation Φ (x) = x est équivalente à l'équation g(x) = e.

c) Démontrer que pour tout x de I, $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

3°) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = \Phi(V_n)$.

a) Démontrer que la suite (V_n) est croissante et majorée par α. Conclure.

b) Démontrer que $\Phi(I) \subset I$.

c) Démontrer par récurrence, que pour tout n, V_n appartient à l'intervalle I.

4°) a) Prouver que pour tout n, on a $|V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|V_n - \alpha|$, puis que $\alpha - V_{n+1} \leq \frac{1}{3}(\alpha - V_n)$.

b) En déduire que, pour tout n : $\alpha - V_n \leq \frac{1}{3^n}$ et que la suite (V_n) converge vers α.

c) Déterminer un entier p pour lequel V_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer cette valeur approchée.