BAC C GABON
session 97

EXERCICE I (5 points)

Dans le plan orienté, on considère deux carrés de sens direct ABCD et AEFG tels que : AB = AE = a et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}$.

Soit K le point tel que DAEK soit un parallélogramme : On appellera I son centre.
Utiliser la figure ci-jointe que l'on complètera au cours des questions.

Partie I :

En utilisant les isométries vectorielles, on veut montrer que AK = GB et que les droites (AK) et (GB) sont perpendiculaires et que le triangle FKC est rectangle isocèle en K.

On désigne par ρ la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1°) a) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GF}$.

b) Démontrer que l'on a $\rho(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}$ et $\rho(\overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{GA}$. En déduire alors que $\rho(\overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{GB}$.

c) Que peut-on en conclure ?

2°) a) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EF}$.

b) Démontrer que $\rho(\overrightarrow{KF}) = \overrightarrow{CK}$ puis conclure.

Partie II :

Soit s la similitude directe qui transforme A en G et K en F.

1°) a) Démontrer que le triangle EAD est équilatéral et que EADK est un losange.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

2°) *On cherche à construire son centre que l'on notera O.*

a) Soit J le point tel que AGJ soit un triangle équilatéral de sens direct.

Quel est l'ensemble (C) des points M tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MG}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$?

b) Soit P le barycentre du système de points pondérés {(G, 3) ; (A, -1)}.

Démontrer que l'ensemble (C') des points M du plan tels que $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est le cercle de centre P et de rayon $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) En déduire la construction du point O.

EXERCICE II (4 points)

Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} - y_n = n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1°) Exprimer, pour tout entier naturel n, y_n en fonction de n.

2°) Dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 1 cm, on considère les points $M_n(n, y_n)_{n\geq 0}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, M_n appartient à la conique (P) d'équation $x^2 - 2y = 0$.

b) Tracer (P) en précisant sa nature et ses éléments caractéristiques (foyer, directrice)

3°) On considère les points A, B, C de (P) d'abscisses respectives a, b et c (a, b et c sont des réels non nuls et deux à deux distincts) et G le centre de gravité du triangle ABC.

On désigne par (T_A), (T_B), (T_C) les tangentes à (P) respectivement en A, B, C.

La perpendiculaire en A à (T_A) s'appelle la normale en A à (P); on la notera (N_A).

a) Montrer qu'une équation de (N_A) s'écrit : $y - 1 = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2$

b) Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection des normales (N_A) et (N_B) puis l'abscisse x_2 du point d'intersection des normales (N_B) et (N_C).

c) En déduire que si les normales (N_A), (N_B) et (N_C) sont concourantes alors G appartient à l'axe focal de (P).

PROBLEME (11 points)

Pour tout entier naturel n, on note fn la fonction définie sur IR par :

$f_0(x) = e^x$ et si n est non nul, $f_n(x) = \frac{(1-x)^n e^x}{n!}$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de la fonction fn da... un plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité graphique étant 2 cm.

Le problème a pour but d'étudier, suivant la parité de n, le comportement des fonctions f_n, de construire deux courbes particulières afin d'obtenir, à partir de suites définies à l'aide de ces fonctions f_n, des limites remarquables.

Partie A:

I Variations de la fonction f_n pour n ≥ 1.

1°) Déterminer, suivant la parité de n, les limites de f_n lorsque x tend vers (+∞). (Pour la première de ces limites, on pourra se ramener à une limite connue en posant X = 1 - x.)

2°) Etudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n, et dresser les tableaux de variations correspondants.

3°) Etudier, suivant la parité de n, les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

II Tracé de courbes et calcul d'aire.

1°) a) Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2.

b) Préciser les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) et les construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$.

En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par ces deux courbes et les droites d'équations x = 1 et x = - 1.

Partie B: Etude d'une suite et calcul de limites

Soit a un réel fixé tel que : 0 ≤ a ≤ 1 et soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$U_n = \int_a^1 f_n(x)dx$

1°) Calculer U_0.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$0 \leq U_n \leq \frac{(1-a)^n}{(n+1)!} U_0$, et en déduire que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0

3°) a) Etablir à l'aide d'une intégration par parties que pour n ≥ 0, on a $U_{n+1} = U_n - \frac{(1-a)^{n+1}}{(n+1)!}e^a$

b) En déduire que pour n ≥ 0 on a :

$$U_n = e - e^a\left[\frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \dots\dots\dots + \frac{(1-a)^n}{n!}\right]$$

4°) Pour n ≥ 0 on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-a)^k}{k!} = \frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \dots\dots\dots + \frac{(1-a)^n}{n!}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = e^{1-a}$.

5°) Pour n ≥ 0 on pose

$$A_n = \frac{1}{2^0 \times 0!} + \frac{1}{2^1 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2^n \times n!}$$

et $B_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\dots + \frac{1}{n!}$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \sqrt{e}$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = e$

Partie C: Une autre suite et calcul d'autres limites.

Pour tout entier naturel n on pose $V_n = \int_1^2 f_n(x)dx$.

1°) a) Montrer que $V_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^2 (x-1)^n e^x dx$

b) Etablir que $0 \leq \int_1^2 (x-1)^n e^x dx \leq e^2$ et en déduire que $|V_n| \leq \frac{e^2}{n!}$ pour tout entier naturel n.

c) Déterminer alors la limite de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$.

2°) a) Démontrer que pour tout n ≥ 1, on a : $f'_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a : $f_n(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + \dots\dots\dots + f'_n(x)$.

c) Montrer alors que

$V_n = f_0(2) + f_1(2) + \dots\dots\dots + f_n(2) - e$

d) On pose pour n ≥ 0,

$$T_n = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \dots\dots\dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Montrer que $V_n = e^2 T_n - e$ (on utilisera la question c)

En déduire $\lim_{n\to+\infty} T_n$

3°) En utilisant les limites de B_n et T_n quand n→ +∞, calculer les limites quand n→ +∞ des expressions suivantes :

$$C_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n!}.$$

$$D_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(2n+1)!}.$$