

BAC C GABON

session 95

3

EXERCICE I (5 points)

1°) On considère le nombre complexe $a = \frac{1 - e^{i\theta}}{2(1 + e^{\frac{i\theta}{2}})}$

avec $-2\pi < \theta < 2\pi$. Déterminer le module et l'argument de a dans les deux cas suivants :

- * $0 < \theta < 2\pi$
- * $-2\pi < \theta < 0$

2°) Dans cette question on prend $\theta = \pi$

a) Démontrer que $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(a) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$.

b) Dans le plan complexe P rapporté au repère

orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe az .

Quelle est la nature de l'application f ? Donner ses éléments caractéristiques.

c) K est le point d'affixe 8. Pour tout entier naturel n , on considère la suite de points (M_n) de P définie par la relation de récurrence $M_{n+1} = f(M_n)$ et de premier terme $M_0 = K$.

Placer les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ et M_8 dans P .

d) On note A_n l'aire du triangle OM_nM_{n+1} et on pose $S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n$.
Exprimer pour tout n , A_{n+1} à l'aide de A_n .
Déterminer S_n en fonction de n et calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE II (4 points)

1°) A et B sont deux points distincts du plan orienté tels que $AB = 6$ (unité 1 cm).

Déterminer et construire :

E_1 ensemble des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = -\frac{\pi}{3} [\pi]$

E_2 ensemble des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

E_3 ensemble des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

E_4 ensemble des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On représentera ces ensembles avec des couleurs différentes sur le même graphique.

2°) Dans une urne, il y a quatre jetons sur chacun desquels est inscrit le nom d'un ensemble du 1°; tous les jetons portent des noms différents.

On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne; on note à chaque tirage le nom de l'ensemble inscrit sur le jeton tiré. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

On appelle X la variable aléatoire associée à l'expérience ci-dessus et qui prend la valeur :

- 3 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont égaux.
- 2 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont symétriques par rapport à (AB)
- 1 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont différents et tels que l'un soit contenu dans l'autre
- m dans les autres cas.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer le réel m pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique : 10 cm).

Partie A: Etude de la fonction f .

1°) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) Etudier les variations de la fonction f . On étudiera la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3°) a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

b) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = -e^{-\frac{1}{x}} + \frac{4x-1}{e^2}$$

Calculer $g(\frac{1}{2})$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

Déterminer les variations de g' , le signe de $g'(x)$ puis les variations de g .

En déduire le signe de $g(x)$, puis la position de (C) par rapport à (T).

c) Tracer (C) et (T) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie B: Etude d'une suite récurrente.

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α et que l'on a $\alpha \in]0; 1[$.

2°) On pose $I = [0; 1]$

a) Démontrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$

b) Démontrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{e^2}$.

c) En déduire que pour tout $x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{4}{e^2} |x - \alpha|$.

3°) n étant un entier naturel, soit (u_n) la suite définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = 1.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n \in I$.

b) Etablir que pour tout entier n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{e^2}\right)^n$.

c) Conclure à la convergence de (u_n) , préciser sa limite et déterminer un entier p tel que u_p en soit une valeur approchée à moins de 10^{-4} .

Partie C: Etude d'une fonction définie par une intégrale.

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1°) Justifier l'existence et la dérivabilité de F sur $[0, +\infty[$ et donner sa fonction dérivée F' . Déterminer le sens de variation de F .

2°) a) Sachant que pour tout $t \geq 0$ on a $e^{-t} \leq 1$, démontrer que pour tout $t \geq 0$: $-e^{-t} \leq t - 1$ et $e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \leq f(x)$

c) Démontrer alors que $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure quant à la limite de F en $+\infty$.

3°) Dresser le tableau de variations de F .