# BAC C GABON session 93

## EXERCICE I (5 points)

1°) Soit ABC un triangle non isocèle en A. On note d la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et d' sa bissectrice extérieure.
Soit M un point du plan distinct de A. Montrer que M est un point de d ou de d' si et seulement si :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right)=\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)+k\pi \qquad k\in Z$$

2°) Soit $\Gamma$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les points d'intersection de la médiatrice de [ BC ] avec $\Gamma$ appartient aux bissectrices d et d'.
3°) On pose AB = c, AC = b, BC = a.
Soit I barycentre de ( B, b), ( C, c)
J barycentre de ( A, c), ( B, b)
K barycentre de ( A, b), ( C, c)
H barycentre de ( A, b + c), ( B, b), ( C, c)
a) Montrer que H est le milieu commun des segments [ AI ] et [ JK ].
b) Calculer en fonction de b et c les distances AJ et AK. En déduire que le quadrilatère AJIK est un losange.

## EXERCICE II ( 4 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \bar{z} - 1$.
1°) Montrer que f = t o s, où s est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et t une translation dont on déterminera le vecteur.
2°) a) Donner l'expression analytique de f.
b) Montrer que f est une isométrie.
c) Expliquer pourquoi f n'est pas un déplacement.
3°) On considère l'application g = f o s' où s' est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
a) Montrer que g est l'application qui au point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' = - z + 1.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

## PROBLEME (11 points)

### Partie A:

1°) On considère la fonction $f_n$ définie sur IR par :
$f_n(x) = (1 - x)^n e^x$ , $n \in \mathbb{N}^*$
Etudier les variations de $f_n$ pour n pair et puis pour n impair. Déterminer les limites de $f_n$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
Présenter les résultats dans deux tableaux.
2°) a) Dresser le tableau des variations de la fonction $f_n$.
b) On donne le tableau suivant :

| x | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_3(x)$ | 1 | 0,8057 | 0,6254 | 0,4630 | 0,3222 | 0,2061 |
| x | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | |
| $f_3(x)$ | 0,1166 | 0,0544 | 0,0178 | 0,0025 | 0 | |

Construire sur [ 0 ; 1 ], la courbe $(C_3)$ représentative de $f_3$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 10 cm.
c) En appliquant la méthode des rectangles aux intervalles $\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right]$, $0 \le k \le 9$, montrer que:

$$\frac{1}{10}\left[f_3(0,1) + f_3(0,2) + \ldots + f_3(1)\right] \le \int_0^1 f_3(x)\,dx \le \frac{1}{10}\left[f_3(0) + f_3(0,1) + \ldots + f_3(0,9)\right]$$

En déduire un encadrement de $\int_0^1 f_3(x)\,dx$

### Partie B:

Soit $F_p$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F_p(x) = \int_0^x (1-t)^{2p+1} e^t\,dt$, $p \in \mathbb{N}$.
1°) Montrer que pour tout réel $t \ge 1$, on a : $e^t(1-t)^{2p+1} \le (1-t)^{2p+1}$
En déduire les limites de $F_p(x)$ et de $\frac{1}{x}F_p(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2°) Montrer que pour tout réel t de [ 0 ; 1 ], on a :
$(1-t)^{2p+1} \le e^t(1-t)^{2p+1} \le e(1-t)^{2p+1}$.
En déduire un encadrement de $F_p(1)$ et ensuite de $F_1(1)$.
Comparer cet encadrement à celui obtenu dans la partie A.2.c).
3°) a) Calculer $F'_p(x)$ et dresser le tableau de variations de $F_p$.
b) Montrer qu'il existe un réel $\alpha_p$ unique, tel que $\alpha_p \ge 1$ et $F_p(\alpha_p) = 0$.
4°) Donner l'allure de la courbe représentative de $F_1$ définie sur + dans un nouveau repère orthonormal d'unité graphique 2 cm. On prendra $F_1(1) = 0,3$ et $\alpha_1 = 1,7$.

### Partie C:

1°) Soit $(u_n)$, $n \ge 1$, la suite définie par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt.$$

a) Montrer que cette suite est positive.
b) Montrer que cette suite est décroisssante. Est-elle convergente ?
2°) Calculer la limite de cette suite.