BERENGER B.   TC

BAC C R.C.I. session 97

EXERCICE I

1°) On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$$I_o = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, dx$$

et, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}\, dx.$$

$$J_o = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx$$

et, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\, dx$$

a) Calculer J_n pour tout entier naturel n.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, :

$$I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

2°) a) Calculer I_1.

b) En déduire I_3.

3°) Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

a) Démontrer que, pour tout réel x :

$$\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\ \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) On pose, pour tout x élément de $\left[0\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$:

$$u(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Calculer $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

En déduire une primitive de f sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$.

c) Calculer I_o puis I_2 et I_4

EXERCICE II

Dans le plan, on donne trois points alignés A, B et P.
Soit un point Q n'appartenant pas à la droite (AB) et tel que : AQ = BP. La parallèle à la droite (PQ) passant par B coupe la droite (AQ) en C.

1°) Justifier l'existence d'une homothétie h transformant P en B et Q en C. Préciser son centre.

2°) a) Construire B_1 et C_1 les images respectives de B et C par h.

b) Démontrer que $AC = BB_1$.

3°) On donne un triangle RST. On veut construire deux points I et J tels que :

$$\begin{cases} (IJ) \,//\, (ST) \\ \text{I appartient à la droite (SR) privée des points S et R} \\ J \in (RT) \\ RJ = SI. \end{cases}$$

(Dans cette question, on ne demande pas de trouver toutes les solutions mais seulement d'en donner une.)

a) Démontrer que, si le triangle RST est isocèle en R, il y a une solution évidente.

b) Dans la suite, les segments [RS] et [RT] ne sont pas de même longueur. A l'aide des deux premières questions, donner un programme de construction d'un couple de points (I, J) solution du problème.
Justifier ce programme.

PROBLEME

Partie A:

Soit f la fonction définie par f(0) = 0 et pour tout réel strictement positif x par : $f(x) = \dfrac{x \ln(x)}{x+1}$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2°) Soit φ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.

a) Etudier les variations de φ.

b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0{,}27 \leq \beta \leq 0{,}28$.

3°) a) Exprimer f'(x) en fonction de $\varphi'(x)$.
En déduire les variations de f.

b) Vérifier que $f(\beta) = -\beta$.

4°) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). On placera en particulier les points d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2; 12.
On prendra ln (0,27) = -1,31 ; ln(0,28) = - 1,27 ; ln(2) = 0,7 ; ln(3) = 1,1 ; ln(5) = 1,6.

Partie B:

1°) a) Démontrer que l'équation f(x) = 1 admet une solution unique α dans [3 ; 4].

b) Démontrer que les équation f(x) = 1 et $e^{1+\frac{1}{x}}$ sont équivalentes.

2°) Soit g la fonction définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

a) Etudier les variations de g.

b) Démontrer que pour tout x élément de [3 ; 4], g(x) est un élément de [3 ; 4].

c) Démontrer que $\forall x \in [3\,;4],\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

On prendra $e^{\frac{4}{3}} = 3{,}8$; $e^{\frac{5}{4}} = 3{,}49$.

3°) Soit (U_n) la suite définie par :
$U_o = 3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Démontrer que pour tout entier n positif ou nul $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.

c) Pour quelles valeurs de n, U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Partie C:

1°) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'équation f(x) = n admet une solution α_n et une seule.
Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2°) a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $\alpha_n \geq e^n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$.

c) Déduire des questions 2a et 2b que la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right)$ est convergente et calculer sa limite.