BERENGER B. TC

BAC C R.C.I. session 94

EXERCICE I

On considère l'équation (E) :

$z^3 - (5+3i)z^2 + (6+11i)z - 10i = 0$, où z désigne un nombre complexe.

1°) a) Démontrer que (E) admet une unique solution réelle z_1.

b) Résoudre l'équation (E). On notera z_2 la solution de (E) telle que $\mathcal{Re}(z_2) = z_1$ et z_3 la troisième solution.

2°) Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J), on appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Déterminer le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 2) et (C, 1).

b) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de S.

c) Calculer l'affixe du point C', image de C par S.

d) Sans aucun calcul, démontrer que le barycentre des points pondérés (B, 2), (C, – 2) et (C', 1) est le point I

EXERCICE II

1°) a) Soit deux nombres réels naturels p et q tels que $p > q$. Démontrer que $p + q$ et $p - q$ sont de même parité.

b) En déduire que $p^2 - q^2$ est soit impair, soit multiple de 4.

2°) Soit n un nombre entier naturel.

a) On suppose que n est impair. Démontrer qu'il existe deux nombres entiers naturels consécutifs p et q tels que ; $n = p^2 - q^2$.

b) On suppose que n est multiple de 4. Démontrer qu'il existe deux nombres entiers naturels p et q tels que : $n = p^2 - q^2$.

3°) Déduire des questions 1°) et 2°) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier naturel soit la différence des carrés de deux nombres entiers naturels.

PROBLEME

L'objet du problème est de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

en utilisant le calcul intégral.

Partie A:

1°) Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2°) Soit $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dots + \dfrac{1}{n!} \end{cases}$$

a) Déduire du 1°) que la suite u est majorée par 3.

b) Démontrer que la suite u est convergente, sans chercher à calculer sa limite.

Partie B:

On considère la fonction f_o de IR vers IR définie par : $f_o(x) = e^{-x}$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n de IR vers IR définie par :

$f_n(x) = x^n e^{-x}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 4 cm), on désigne par (C_o) et (C_n) les représentations graphiques respectives de f_o et f_n.

1°) Etudier les variations de f_0 et f_1. Préciser la position de (C_o) par rapport à (C_1). Construire les courbes (C_o) et (C_1) sur une même figure (prendre $e = 2,7$ et $e^{-1} = 0,37$).

2°) Etudier les variations de f_n pour $n \geq 2$, en distinguant deux cas suivant la parité de n.

3°) Construire les courbes (C_2) et (C_3) sur une autre figure que la figure du 1°).

Partie C:

Pour tout nombre entier naturel n, on considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$

1°) Calculer $F_o(x)$ et $F_1(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+$. Calculer ensuite $\lim_{x \to +\infty} F_o(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} F_1(x)$.

2°) Démontrer que:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ F_n(x) = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x)$.

Partie D.

Le but de cette dernière partie est de calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de la partie A.

1°) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} u_n.$$

2°) a) Démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall t \in [0,1] \quad 0 \leq f_n(t) \leq e^{-1}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq F_n(1) \leq e^{-1}$.

3°) Déduire des résultats des questions précédentes la limite lorsque n tend vers l'infini de :

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Correction session 94

EXERCICE I

1°) a) z_1 est solution réelle de (E) ssi

$$\begin{cases} z_1^3 - 5z_1^2 + 6z_1 = 0 \\ -3z_1^2 + 11z_1 - 10 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } z_1 = 2$$

b) (E) <=> $(z - 2)[z^2 - (3 + 3i)z + 5i] = 0$

$\Delta = -2i = (1 - i)^2$; $z_2 = 2 + i$; $z_3 = 1 + 2i$

2°) a) L'affixe du barycentre est $Z = 2z_1 - 2z_2 + z_3$ donc $Z = 1$. Le barycentre est donc le point I.

b) Première méthode:

$$k = \frac{BC}{AB} = \frac{|z_3 - z_2|}{|z_2 - z_1|} = |1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right)$$

$$= \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

Ω étant le centre de la similitude directe on doit donc avoir ΩAB isocèle rectangle et le triplet (Ω, A, B) direct on vérifie que Ω = I en montrant que

$\text{mes}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}$ et que $\frac{IB}{IA} = \sqrt{2}$.

Deuxième méthode: La relation complexe associée à S est de la forme $z' = az + b$,

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 2 + i \\ (2 + i)a + b = 1 + 2i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 + i \\ b = -i \end{cases}$$

Donc S est associée à la relation $z' = (1 + i)z - i$

$k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $\theta = \arg(a) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.

L'affixe du centre Ω vérifie la relation $z = (1 + i)z - i$ donc $z = 1$ et Ω = I.

S est donc la similitude directe de centre I, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c) $Z_{C'} = (1 + i)z_3 - i = -1 + 2i$. Donc C'(-1; 2).

d) S étant une application affine conserve le barycentre. I est barycentre de (A, 2), (B, -2), (C, 1) donc S(I) = I est barycentre de (B, 2), (C, -2), (C', 1).

EXERCICE II

1°) a) Première méthode: disjonction des cas: En posant $p = 2k$ ou $p = 2k + 1$ et $q = 2k'$ ou $q = 2k' + 1$, on vérifie que $p + q$ et $p - q$ ont la même parité.

Deuxième méthode: utilisation des congruences $(p + q) - (p - q) = 2q$ donc $p + q \equiv p - q \quad [2]$

b) $p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$. C'est donc le produit soit de deux nombres impairs donc un nombre impair, soit de deux nombres pairs donc un multiple de 4.

2°) a) En posant $n = 2k + 1 = (k' + 1)^2 - k'^2$, on vérifie que $k' = k$.

b) Si $n = 4k$ et $n = p^2 - q^2$, on sait que $p + q$ et $p - q$ doivent être tous deux pairs. Posons alors $p - q = 2r$ et $p + q = 2r'$. On doit donc avoir $rr' = k$. r est donc un diviseur de k, prenons par exemple $r = 1$, alors

$$\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 2k \end{cases} \iff \begin{cases} p = k + 1 \\ q = k - 1 \end{cases}$$

3°) Si n est impair ou multiple de 4 alors d'après 2°) n est différence de deux carrés.

Réciproquement si n est une différence de deux carrés, d'après 1°) b) , n est impair ou multiple de 4.

Une condition nécessaire et suffisante pour que n soit une différence de deux carrés est qu'il soit impair ou multiple de 4.

PROBLEME

Partie A:

1°) Soit p(n) la proposition $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

- $\frac{1}{1!} = 1$ et $\frac{1}{2^0} = 1$ donc p(1) est vraie.
- Supposons p(n) vraie

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \iff 2^{n-1} \leq n!$$

$$\iff (n + 1)\,2^{n-1} \leq (n + 1)\,n! \qquad (\alpha)$$

or $2 \leq n + 1$ car $n \geq 1$ donc

$$(\alpha) \Rightarrow 2.2^{n-1} \leq (n + 1)!$$

$$\iff 2^n \leq (n + 1)!$$

$$\iff \frac{1}{(n + 1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

- On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2°) a) $1 \leq 1$

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$$

$$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$$

....

$$\frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{donc } u_n \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$u_n \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$u_n \leq 3$$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n + 1)!}$. Donc (u_n) est croissante.

Toute suite croissante et majorée est convergente. (u_n) est donc convergente.

Partie B:

1°) $f'_o(x) = -e^{-x}$ tableau de variations 1

$f'_1(x) = (1 - x)e^{-x}$ tableau de variations 2

$f_1(x) - f_o(x) = (x - 1)e^{-x}$ donc

sur $]-\infty; 1[$ (C_1) est au-dessous de (C_o);

sur $]1; +\infty[$ (C_1) est au-dessus de (C_o)

Représentations graphiques de (C_o) et (C_1) sur fig 1

2°) $f'_n(x) = x^{n-1}(n - x)\,e^{-x}$
Tableau de variations 3 dans le cas où n est pair.
Tableau de variations 4 dans le cas où n est impair.
3°) Courbes (C_2) et (C_3) sur la fig 2. Il est intéressant de vérifier que sur $]-\infty; 1[$ (C_3) est au-dessous de (C_2) et sur $]1; +\infty[$ (C_3) est au-dessus de (C_2)

Partie C:

1°) $F_o(x) = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$

$F_1(x) = \int_0^x t\,e^{-t}\,dt$ Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$

alors on a : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$ donc

$F_1(x) = [-t\,e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$

$F_1(x) = 1 - e^{-x} - x\,e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_o(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = 1$

2°) $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$ Posons $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-t}$

alors on a : $u'(t) = n\,t^{n-1}$ et $v(t) = -e^{-t}$ donc

$F_n(x) = [-t^n e^{-t}]_0^x - \int_0^x -n\,t^{n-1} e^{-t}\,dt$

$F_n(x) = -x^n e^{-x} + n\,F_{n-1}(x)$

Partie D.

1°) a) Pour x = 1, $F_n(1) = -e^{-1} + nF_{n-1}(1)$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{F_n(1)}{n!} = -\dfrac{e^{-1}}{n!} + \dfrac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$

b) $\dfrac{F_n(1)}{n!} = -\dfrac{e^{-1}}{n!} + \dfrac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$

$\dfrac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!} = -\dfrac{e^{-1}}{(n-1)!} + \dfrac{F_{n-2}(1)}{(n-2)!}$

$\dfrac{F_{n-2}(1)}{(n-2)!} = -\dfrac{e^{-1}}{(n-2)!} + \dfrac{F_{n-3}(1)}{(n-3)!}$

....

$\dfrac{F_2(1)}{2!} = -\dfrac{e^{-1}}{2!} + \dfrac{F_1(1)}{1!}$

$\dfrac{F_1(1)}{1!} = -\dfrac{e^{-1}}{1!} + \dfrac{F_0(1)}{0!}$

$\dfrac{F_n(1)}{n!} = -e^{-1}\left(\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{(n-2)!} + \dots + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{1!}\right) + \dfrac{F_o(1)}{0!}$

$= -e^{-1} u_n + 1$

de plus $\dfrac{F_o(1)}{0!} = F_o(1) = 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1}u_o$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} u_n$.

2°) a) En étudiant les tableaux de variations 2, 3 et 4 on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est croissante sur [0, 1] donc $\forall t \in [0,1]$ $f_n(0) \le f_n(t) \le f_n(1)$ c'est à dire $0 \le f_n(t) \le e^{-1}$

b) Donc $\int_0^1 0\,dt \le \int_0^1 f_n(t)\,dt \le \int_0^1 e^{-1}\,dt$

c'est à dire que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \le F_n(1) \le e^{-1}$.

3°) $0 \le F_n(1) \le e^{-1}$ $\iff 0 \le n!(1 - e^{-1}u_n) \le e^{-1}$

$\iff 0 \le e - u_n \le \dfrac{1}{n!}$

Or d'après la partie A 1°) on a $\dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \le e - u_n \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$\lim \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ d'où $\lim(e - u_n) = 0$ soit: $\lim u_n = e$