BERENGER B. TC

BAC C R.C.I.
session 93

EXERCICE I

On considère l'équation :

(E) $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $19x + 9y = 3$

1°) Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors x est un multiple de 3.

2°)Résoudre l'équation (E).

3°) Déterminer les couples (x,y) solutions de l'équation (E) tels que le PGCD de x et y soit maximum.

EXERCICE II

Dans le plan affine euclidien orienté ($\mathcal{P}$), on note ABCDEF un hexagone régulier de centre O tel que le triplet (O, A, B) soit de sens direct. Soit I le milieu de [OA]. Faire une figure.

Si on souhaite utiliser les nombres complexes pour traiter cet exercice, on choisira le repère orthonormé direct (O, I, J) (on construira le point J à partir de O et I).

1°) Soit S_1 la similitude plane directe de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$

a) Déterminer l'image du point E par S_1.

b) Déterminer l'antécédent de I par S_1.

2°) Soit S_2 la similitude plane directe de centre I transformant A en F. Déterminer le rapport et l'angle de S_2.

3°) Soit S la similitude plane directe transformant (E, D) en (F, I).

a) Comparer S et $S_2 \circ S_1$.

b) En déduire le rapport et l'angle de S. Construire son centre Ω en énumérant les différentes étapes de cette construction.

PROBLEME

Partie A:

1°) Soit f la fonction de IR vers IR définie par :

$f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, où ln désigne le "logarithme népérien".

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier sa parité.

b) Montrer que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Etudier les variations de f.

c) Construire avec précision la représentation graphique (C) de f dans un repère orthonormé (l'unité sera prise égale à 4 cm). On indiquera en particulier la nature des branches infinies.

2°) Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et I(a) l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

a) Calculer I(a) à l'aide d'une intégration par parties.

b) Calculer la limite de I(a) lorsque a tend vers 1 par valeurs inférieures.

3°)Soit g la fonction définie sur]-1; 1[par

$$g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

a) Etudier la parité de g puis ses variations.

b) Construire avec précision la représentation graphique (Γ) de g, dans le même repère que précédemment.

4°) Soit h la fonction définie sur]-1; 1[par

$h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Etudier les variations de h.

b) En déduire la position relative de (C) et (Γ) sur]-1; 1[.

Partie B

Pour n élément de IN*, on pose : $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}$

et $v_n = u_n\, e^{\frac{1}{12n}}$

1°) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} . e^{-1}.$$

b) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

b) Montrer que si l'on pose $x = \frac{1}{2n+1}$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{h(x)}{x}$$

c) En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

2°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n < v_n$. Déduire des résultats précédents que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

b) Montrer que $\lim (v_n - u_n) = 0$. En déduire que (u_n) et (v_n) ont la même limite. En notant l cette limite, montrer que l'on a : $0{,}39 < l < 0{,}4$.

Correction session 93

EXERCICE I

1°) Soit un couple $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant l'équation $19x + 9y = 3 \iff 19x = 3 - 9y$
$\iff 19x = 3(1 - 3y)$
donc 3 divise 19 x. D'après le th. de Gauss, si un nombre divise un produit de 2 facteurs et s'il est étranger (premier) à l'un des facteurs, alors il divise l'autre. Comme 3 et 19 sont premiers entre eux, 3 divise x. x est donc un multiple de 3.
2°)Déterminons donc une solution particulière de l'équation (E) telle que x soit un multiple de 3.
M19 = { ..., -57, -38, -19, 0, 19, 38, 57, ... }
M9 = { ..., -54, -45, -36, -27, -18, -9, 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, ... }
Nous avons 57 - 54 = 3, c'est-à-dire 19(3) + 9(-6) = 3.
Posons $x_o = 3$ et $y_o = -6$ (x_o, y_o) est solution de (E)
Pour tout autre solution (x, y) de (E) on a:

$$\begin{array}{l} 19x + 9y = 3 \\ \underline{19x_o + 9y_o = 3} \\ \\ 19(x - x_o) + 9(y - y_o) = 0 \end{array}$$

soit $19(x - x_o) = -9(y - y_o)$ Puisque 19 et 9 sont premiers entre eux d'après le th de Gauss 19 divise $y - y_o$ et 9 divise $x - x_o$.
Donc $x - x_o = -9k$ et $y - y_o = 19k$
soit $x = x_o - 9k$ et $y = y_o + 19k$.
d'ou $S = \{ (3 - 9k; -6 + 19k) / k \in \mathbb{Z} \}$
3°) Nous savons que pgcd(a, b) = pgcd(a + k b, b) avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc :

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(3-9k,-6+19k) &= \text{pgcd}[3 - 9k, -6+19k + 2(3-9k)] \\ &= \text{pgcd}(3 - 9k, k) \\ &= \text{pgcd}(3 - 9k + 9k, k) \\ &= \text{pgcd}(3, k) \end{aligned}$$

On a alors pgcd(3, k) = 3 si k est un multiple de 3 et pgcd(3, k) = 1 si k n'est pas un multiple de 3.
Donc pour que le pgcd(x, y) soit maximum lorsque (x, y) solution de (E), il faut que k soit un multiple de 3 donc que x = 3 - 27 k' et y = - 6 + 57 k'.

EXERCICE II

Méthode géométrique :
1°) ABCDEF étant un hexagone régulier, les points A et D, B et E, C et F sont diamétralement opposés, donc O milieu de [EB] et $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$. O est donc l'image de E dans l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. De plus le triangle OAB est un triangle équilatéral et le triplet (O, A, B) de sens direct donc $\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. Une symétrie orthogonale par rapport à la hauteur issue de A permet donc d'obtenir $\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ soit,

$\text{mes}(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et BO = BA. On peut donc conclure que A est l'image de O dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. A est donc l'image de E dans la composée de l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et de la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; c'est-à-dire que A est l'image de E par la similitude S_1 de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On démontre de même que l'image de D par la rotation de centre B d'angle $\frac{\pi}{3}$ est F

[pour montrer que $\text{mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ on se servira par exemple du fait que [BD] est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$ et [BI] celle de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO})$] et que l'image de F par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ est I, donc que $S_1(D) = I$. D est donc l'antécédent de I par S_1.
2°) On sait que $S_2(I) = I$ et $S_2(A) = F$ donc
$\text{mes}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IF}) \equiv \theta$ $[2\pi]$ (θ angle de la similitude) et $\frac{IF}{IA} = k$ (k rapport de la similitude). D'où $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

et $k = \frac{IF}{IA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$. S_2 est donc la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3°) S2 o S1(E) = S2(A) = F et S2 o S1(D) = S2(I) = I. Or S2 o S1, composée de 2 similitudes directes est une similitude directe qui transforme (E, D) en (F, I). Mais S étant aussi une similitude directe qui transforme (E, D) en (F, I), nous avons S = S2 o S1; car il existe une seule similitude directe transformant un couple de points donné en un autre couple de points donné. S est donc la similitude de rapport, le produit des rapports donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'angle, la somme des angles donc $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω.

$S(E) = F$ donc $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ alors Ω appartient à l'arc de cercle (dont le centre appartient à la médiatrice de [EF] et à la perpendiculaire Δ en E à la demi-droite [ET) telle que $\text{mes}(\overrightarrow{ET}, \overrightarrow{EF}) \equiv -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ inclus dans le demi-plan ne contenant pas T ([ET) = [EA) et Δ = (DE)

$S(D) = I$ donc $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ alors Ω appartient à l'arc de cercle (dont le centre appartient à la médiatrice de [DI] et à la perpendiculaire Δ' en D à la demi-droite [DT') telle que $\text{mes}(\overrightarrow{DT'}, \overrightarrow{DI}) \equiv -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ inclus dans le demi-plan ne contenant pas T ([DT') = [DB) et Δ' = (DE))
Les deux arcs de cercle se coupent en Ω.

Méthode analytique:

Soit (O, I, J) repère orthonormé. Alors A, B, C, D, E, F ont respectivement pour affixe $z_k = 2\,e^{i\frac{k\pi}{3}}$, avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

1°) Déterminons l'application complexe f associée à S_1: on trouve $f(z) = (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\, i\,)\, z + \frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$.

On calcule alors $f(z_E)$, on trouve que $f(z_E) = z_A$ donc $S_1(E) = A$.

On résoud l'équation $f(z) = z_I$ et on trouve que $z = -2$ donc l'antécédant de I est D.

2°) On détermine de même l'application complexe g associée à S_2 on trouve $g(z) = -i\sqrt{3}\; z + (1 + i\sqrt{3})$, ce qui nous permet de déterminer les caractéristiques de S2: $|-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, $\arg(-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}$, donc S_2 est la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3°) L'application associée à $S_2 \circ S_1$ est $h(z) = g\circ f(z)$ donc $h(z) = (\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\, i\,)\, z + \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{3})$.

La recherche du point invariant donne l'affixe de Ω. On trouve $z_\Omega = 1 - 3\sqrt{3}\; i$. Le point W se construit alors facilement, il apartient à la perpendiculaire en I à (OI) (car il a pour abscisse 1) et $\overrightarrow{I\Omega} = 3\,\overrightarrow{IF}$.

PROBLEME

Partie A:

1°) $Df = IR - \{-1; 1\}$ donc 0 centre de symétrie de Df.

De plus, $f(-x) = x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|$

$= x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{-1}$

$= x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -f(x)$.

f est impaire : domaine d'étude : $[\,0, 1[\; \cup\;]1; +\infty[$.

2°) La fonction est continue et dérivable sur tous les intervalles où elle ne s'annule pas donc sur , la fonction ln est dérivable là où elle est définie donc est dérivable sur Donc f étant la somme de deux fonctions dérivables est dérivable sur Df.

$f'(x) = -1 + \frac{1}{1-x^2} = \frac{x^2}{1-x^2}$

c) Construire avec précision la représentation graphique (C) de f dans un repère orthonormé (l'unité sera prise égale à 4 cm). On indiquera en particulier la nature des branches infinies.

2°) Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et I(a) l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

a) Calculer I(a) à l'aide d'une intégration par parties.

b) Calculer la limite de I(a) lorsque a tend vers 1 par valeurs inférieures.

3°)Soit g la fonction définie sur $]-1; 1[$ par

$$g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

a) Etudier la parité de g puis ses variations.

b) Construire avec précision la représentation graphique (Γ) de g, dans le même repère que précédemment.

4°) Soit h la fonction définie sur $]-1; 1[$ par

$h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Etudier les variations de h.

b) En déduire la position relative de (C) et (Γ) sur $]-1; 1[$.

Partie B

Pour n élément de IN*, on pose : $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}}{n!}$

et $v_n = u_n\, e^{\frac{1}{12n}}$

1°) a) Vérifier que $\forall n \in IN^*$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} . e^{-1}.$$

b) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

b) Montrer que si l'on pose $x = \frac{1}{2n+1}$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{h(x)}{x}$$

c) En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

2°) a) Montrer que $\forall n \in IN^*$ $u_n < v_n$. Déduire des résultats précédents que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

b) Montrer que $\lim (v_n - u_n) = 0$. En déduire que (u_n) et (v_n) ont la même limite. En notant ℓ cette limite, montrer que l'on a : $0{,}39 < \ell < 0{,}4$.