Exercice 1 (5 points)

Soit ABCDEFGH un cube de côté 2. On choisit le repère orthonormal $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \qquad \vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CD] et [DH]. On note (P) le plan contenant les points I, J et K.

1) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).
3) Justifier que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (P).
4) On appelle L, M et N les milieux respectifs des segments [HE], [EF] et [FB]. Vérifier que les points L, M et N appartiennent au plan (P).
5) En déduire que la section du cube par le plan (P) un hexagone.

Exercice 2 (5 points)

Dans une kermesse, un jeu est organisé de la façon suivante : le joueur mise 500 francs CFA puis il réalise un tirage en deux étapes :

1re étape :

Le joueur tire au hasard un billet dans un panier où sont placés 6 billets marqués « U_1 » et 4 billets marqués « U_2 ». On suppose l'équiprobabilité des tirages.

2e étape :

Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_1 », il tire alors un jeton dans l'urne U_1 où sont placés 5 jetons marqués « Perdant » et 3 jetons marqués « Gagnant ». On suppose l'équiprobabilité des tirages ;

Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_2 », il tire alors un jeton dans l'urne U_2 où sont placés 2 jetons marqués « Perdant » et 3 jetons marqués « Gagnant ». On suppose l'équiprobabilité des tirages.

On note A l'événement : « Le joueur a tiré un billet "U_1" ».

On note B l'événement : « Le joueur a tiré un billet "U_2" ».

On note G l'événement : « Le joueur a tiré un jeton marqué "Gagnant" ».

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.
2) Calculer la probabilité des événements $(G \cap A)$ et $(G \cap B)$.
3) Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{93}{200}$.
4) Quelle est la probabilité conditionnelle de l'événement A par rapport à l'événement G ?
5) Avec un jeton gagnant de l'urne U_1, le joueur reçoit 1 500 francs CFA ; avec un jeton gagnant de l'urne U_2, il reçoit 500 francs. Et dans les autres cas, il ne reçoit rien. On notera X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue du jeu.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b) Etablir la loi de probabilité de X.
   c) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type.

Problème (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 2 cm. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx + d$

Où a, b, c et d sont des réels, indépendants de x, à déterminer.

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1) La courbe (C_f) est tangente à la droite (T) d'équation : $y = 2x - 1$ au point $A(0; -1)$. Justifier que les réels a et b sont solution du système :

$$\begin{cases} a + b = -1 - d \\ 2a + b = c - 2 \end{cases}$$

2) La courbe (C_f) a pour asymptote oblique en $+\infty$ la droite (D) d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$.
   a) Déduire de ces informations les valeurs des réels c et d.
   b) Montrer pour tout réel x que : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + 2x - \frac{1}{2}$.

Partie B

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) On note f' la fonction dérivée de f.
   a) Montrer, pour tout réel x que : $f'(x) = (e^{-x} + 1)(2 - e^{-x})$.

b) En déduire les variations de f.

c) Quelles sont les coordonnées du point B de la courbe correspondant au minimum de la fonction f ?

3) Étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote (D).

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

5) a) Montrer que f est bijective de $\left]\ln\left(\frac{1}{2}\right) ; +\infty\right[$ vers un intervalle K que l'on déterminera.

b) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f définie sur K. Déterminer les variations de f^{-1} sur K

6) Construire (C_f), l'asymptote (D), la tangente (T) et la courbe (Γ) représentative de la fonction f^{-1}.

Partie C

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \frac{1}{2} - f(x)$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout entier naturel : $U_n = 4[G(n) - G(-\ln 2)]$.

1) Donner une interprétation graphique du nombre U_n.

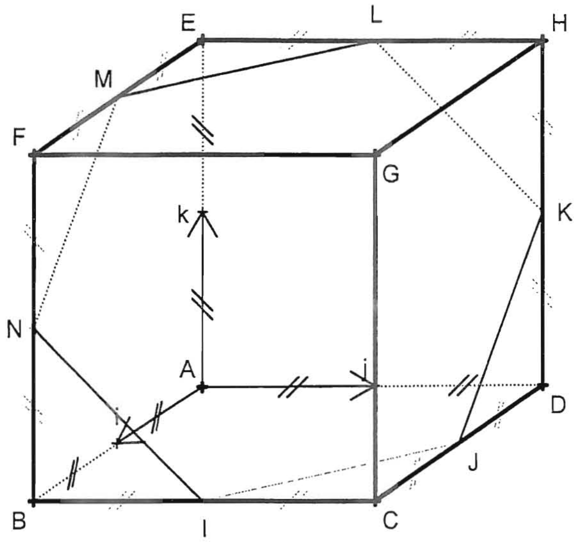
2) Calculer U_n en fonction de n.

3) Quelle est la limite de la suite (U_n) ?

BAC 2013- Maths D

Proposition de correction

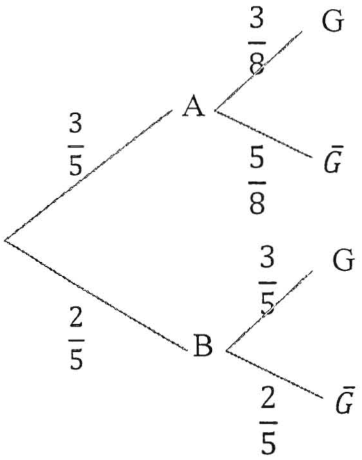
Exercice 1 (5 points)



1) $I(2;1;0), J(1;2;0)$ et $K(0;2;1)$
2) Equation du plan (P) : $x+y+z-3=0$
3) $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ est un vecteur normal à (P)
4) Coordonnées des points L, M et N :
   L(0; 1; 2), M(1; 0; 2) et N(2; 0; 1)
   Après proposition de correction, la vérification est immédiate si les élèves utilisent le plan (Q) proposé en remédiation, ou bien le plan (P) si son équation est correcte.
5) Déduction immédiate pour les élèves ayant parfaitement trouvé la question 5)

Exercice 2 (5 points)

1) Arbre de choix



2) $p(G\cap A)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$;
   $p(G\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$
3) $p(G)=p(G\cap A)+p(G\cap B)=\frac{9}{40}+\frac{6}{25}=\frac{93}{200}$
4) $p(A|G)=\frac{p(G\cap A)}{p(G)}=\frac{45}{93}$
5)
   a) $X(U)=\{\cancel{0;500;1500}\}$ $\{-500;0;1000$
   b) Loi de probabilité

x_i	0	500	1500	Total
$p(X=x_i)$	$\frac{107}{200}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{6}{25}$	1
$x_i p(X=x_i)$	0	$\frac{225}{2}$	360	$\frac{945}{2}$

   c) $E(X)=\frac{945}{2}$;
   $\sigma=\frac{\sqrt{1491975}}{2}\approx 610{,}732$

Problème

Partie A

1) $f(0)=a+b+d$ et $f(0)=-1\Leftrightarrow$
   $a+b+d=-1\Leftrightarrow a+b=-1-d$
   $f'(x)=-2ae^{-2x}-be^{-x}+c\Leftrightarrow f'(0)$
   $=-2a-b+c$ et $f'(0)=2$
   $\Leftrightarrow -2a-b+c=2$

D'où le système cherché.

2)
   a) (D) étant une asymptote à (C_f) en $+\infty$, cela implique que :
   $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-\frac{1}{2})\right]=0$$
   Or: $\lim\limits_{x\to+\infty} ae^{-2x}=\lim\limits_{\to\infty} be^{-x}=0$
   Donc par identification, on déduit que $c=2$ et $d=-\frac{1}{2}$
   b) La résolution de ce système permet d'obtenir la fonction :
   $$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}+2x-\frac{1}{2}$$

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2)
   a) Dérivabilité de la fonction f
   $$f'(x)=-e^{-2x}+e^{-x}+2$$
   $$(e^{-x}+1)(2-e^{-x})=2e^{-x}-e^{-2x}+2-e^{-x}$$

b) f est décroissante sur $]-\infty; -\ln 2]$ et croissante sur $[-\ln 2\,; +\infty[$

c) $B\left(-\ln 2\,; -\ln 4 - \frac{1}{2}\right)$

3) $f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-x}(e^{-x} - 2)$

(C_f) est au dessus de (D) sur $]-\infty; -\ln 2]$ et au dessous de (D) sur $[-\ln 2\,; +\infty[$

4) $-1{,}31 \leq \alpha \leq -1{,}30$

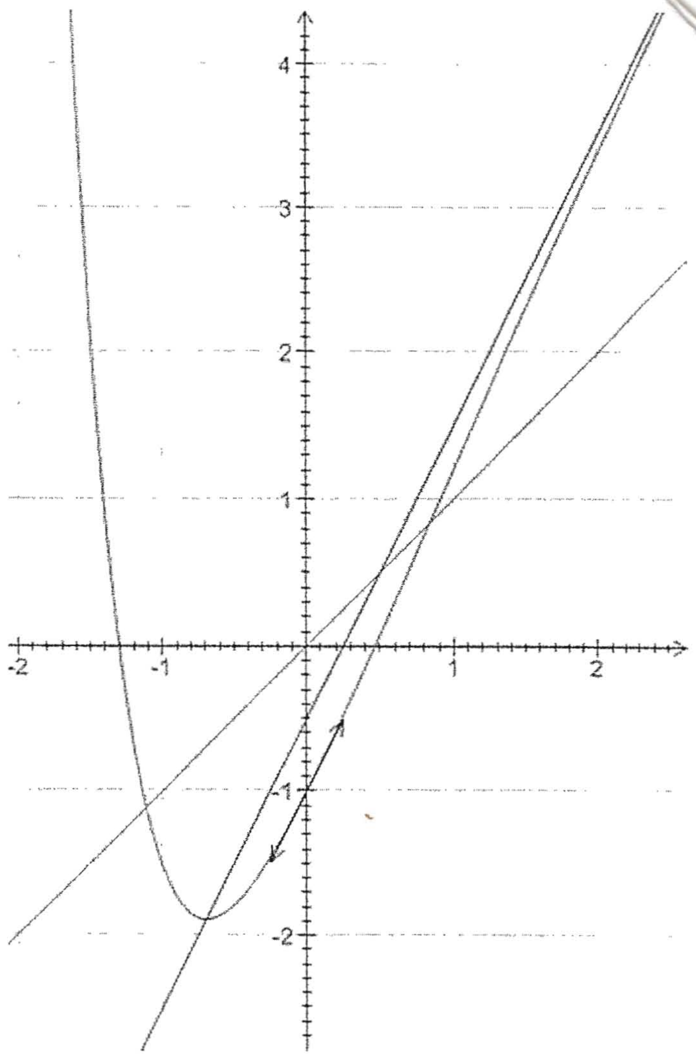
$0{,}46 \leq \beta \leq 0{,}47$

5)

a) Suivant la démarche, on trouve $K = \left]-\ln 4 - \frac{1}{2}; +\infty\right[$

b) f^{-1} a même variation que f sur K, à savoir strictement croissante sur K.

6) Courbe. Chaque correcteur saura construire (Γ). Cela n'a pas été rendu possible pour cette proposition de correction.



Partie C

1) U_n est l'aire délimitée par (D), (C_f) et la droite d'équation $x = n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2) $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x}$. On justifie la continuité de la fonction g et on obtient sa primitive G définie par : $G(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} - e^{-x}$

$$U_n = e^{-2n} - 4e^{-n} + 4$$

3) $\lim U_n = 4$.

Grille de correction série D

Exercice 1 (5 points)

1)	Coordonnées des Points I, J et K	$0{,}25 \times 3$	0,75
2)	Démarche (méthode utilisée)	0,5	1
	Résultat correct	0,5	
3)	Ici, on évalue la démarche utilisée	1	1
4)	Vérification évidente pour les élèves qui utilisent l'équation de (P) ou de (Q)	$0{,}25 \times 3$	0,75
5)	Construction du cube	0,75	1,5
	Mise en évidence de l'hexagone (les points I, J, K, L, M et N sont correctement placé)	0,75	

Exercice 2 (5 points)

1)	Construction de l'arbre de choix avec toutes les données correctes simplifiées ou pas		1	1
	Construction de l'arbre avec ~~au moins~~ une donnée fausse ou avec des données manquantes		0,5	
2)	Calcul de $p(A \cap G)$ et $p(G \cap B)$ en cohérence avec les données de la question 1		$=0{,}5 \times 2$	~~0,5~~ 1
3)	L'élève écrit $p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap B)$ ou bien il met en évidence la somme des valeurs de $p(A \cap G)$ et $p(G \cap B)$		0,25	0,5
	Résultat correct		0,25	
4)	Démarche		0,25	0,5
	Résultat correct		0,25	
5)	a)	Valeurs prise sont correctes et justes	$0{,}25 \times 3$	0,75
	b)	Loi de probabilité	$0{,}25 \times 3$	0,75
	c)	Espérance et écart type	$0{,}25 \times 2$	0,5

Problème (10 points)

Partie A (2,5 points)

1)	L'élève traduit les données :	$f(0)$	0,25	1
		Détermination de $f'(x)$ avec les paramètres a, b et c	0,25	
		$f'(0)$	0,25	
	Mise en évidence du système		0,25	
2)	a)	Démarche	0,25	0,75
		Détermination des valeurs de c et d	$0{,}25 \times 2$	
	b)	Démarche de résolution	0,25	0,75
		Détermination des valeurs a et b	$0{,}25 \times 2$	

Partie B (6 points)

1)	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	Justification des calculs	0,25	0,5
		Résultat correcte	0,25	
	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$	Justification des calculs	0,25	0,5
		Résultat correcte	0,25	
2)	a)	Dérivabilité de f	0,25	0,5
		Démarche	0,25	

2)	b)	Signe de $f'(x)$ sur l'ensemble des nombres réels	0,25	0,5
		Variations de f correctement trouvée	0,25	
		Si l'élève a fourni des données correctes sur le signe de la dérivée et la variation de la fonction sur un des ensembles $]-\infty; -\ln 2]$ ou $[-\ln 2\,; +\infty[$ ou bien il les a représenté dans un tableau de variations complet.	0,25	
	c)	Résultat correct	0,5	0,5
3)		Démarche et cohérence des étapes de justifications	0,25	0,5
		Résultat correct	0,25	
4)		Prise en compte de la démarche pour les deux étapes de démonstration, à condition qu'une seule étape soit correctement élaborée, même si l'autre n'est pas faite	0 ,25	0,75
		Bonne encadrement de α	0,25	
		Bonne encadrement de β	0,25	
5)	a)	Démarche (continuité ou dérivabilité et variation de f)	0,25	0,5
		Détermination de l'intervalle K	0,25	
	b)	Résultat correct	0,25	0,25
6)	Construction de :	(C_f)	0,5	1,5
		(D)	0,25	
		(T)	0,25	
		(Γ)	0,25	
		Respect de l'unité graphique	0,25	

<u>Partie C</u> (1,5 points)

1)	Interprétation correct	0,5	0,5
2)	Détermination de la primitive G	0,25	0,5
	Calcul du terme de la suite	0,25	
3)	Démarche de justification	0,25	0,5
	Résultat correct	0,25	