EXO1

$n \geq 0$ $U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ $U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2}\,dx$

1° $f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ $x \in [0;1]$.

0,5 f est derivable sur $[0;1]$ et

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2}$$

donc $\forall x \in [0;1]$ $f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$.

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[f(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(f(1) - f(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$$

$$\boxed{U_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)}$$ 0,25

$$U_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$ 0,25

2° a - $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \left(x^{n+1}\sqrt{1+x^2} - x^n\sqrt{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,(x-1)\,dx$

0,25 $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 0 \Rightarrow x^n\sqrt{1+x^2}\,(x-1) \leq 0$ et $U_{n+1} \leq U_n$

donc la suite (U_n) est $\searrow$.

0,25 $\forall x \in [0;1]$ $x^n \geq 0$, $\sqrt{1+x^2} > 0$ et $x^n\sqrt{1+x^2} \geq 0$ et $\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx \geq 0$

donc $U_n \geq 0$.

0,25 La suite $(U_n)_n$ est $\searrow$ et minorée par 0 donc $(U_n)_n$ CV.

b - 0,25 $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x^n \leq x^n\sqrt{1+x^2} \leq x^n\sqrt{2} \Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq U_n \leq \sqrt{2}\int_0^1 x^n\,dx$$

0,25 $\Rightarrow \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\forall n \geq 1$

0,25 $\lim \frac{1}{n+1} = 0 = \lim \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ donc $\lim U_n = 0$.

3°) $n \geq 3 \quad I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{(1+x^2)^3}\, dx$

a) $U_n + U_{n-2} = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2}\, dx + \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\, dx$

$= \int_0^1 \left(x^n \sqrt{1+x^2} + x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\right) dx = \int_0^1 x^{n-2}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\, dx$

0,25 $= \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{(1+x^2)^3}\, dx = I_n$ donc $\boxed{U_n + U_{n-2} = I_n}$

b) $I_n = \int_0^1 x^{n-2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$

$u = (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad u' = 3x\sqrt{1+x^2}$

$v' = x^{n-2} \qquad v = \frac{1}{n-1} x^{n-1}$

0,5 $I_n = \frac{1}{n-1}\left[x^{n-1}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{3}{n-1}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\, dx$

$\boxed{I_n = \frac{2\sqrt{2}}{n-1} - \frac{3}{n-1}U_n}$ or $U_n + U_{n-2} = I_n$ donc

$U_n + U_{n-2} = \frac{2\sqrt{2}}{n-1} - \frac{3}{n-1}U_n \Rightarrow (n-1)U_n + (n-1)U_{n-2} = 2\sqrt{2} - 3U_n$

donc $\boxed{\forall n \geq 3 \quad (n+2)U_n + (n-1)U_{n-2} = 2\sqrt{2}}$ 0,25

c) la suite $(U_n) \searrow$ donc $U_n \leq U_{n-2}$

$U_n \leq U_{n-2} \Rightarrow (n+2)U_n \leq (n+2)U_{n-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+2)U_n + (n-1)U_{n-2} \leq (n+2)U_{n-2} + (n-1)U_{n-2}$

$\Rightarrow \boxed{(n+2)U_n + (n-1)U_{n-2} \leq (2n+1)U_{n-2}}$ 0,5

or $(n+2)U_n + (n-1)U_{n-2} = 2\sqrt{2}$ donc $\forall n \geq 3 \quad 2\sqrt{2} \leq (2n+1)U_{n-2}$

en posant $p = n-2$ on a pour $n \geq 3 \quad p \geq 1$ et $(2p+5)U_p \geq 2\sqrt{2}$ 0,25 d'après 2) $2\sqrt{2} \leq (2p+5)u_p$

avec (ii) $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ donc $u_p \leq \frac{\sqrt{2}}{p+1}$ et $(2p+5)u_p \leq \frac{(2p+5)\sqrt{2}}{p+1}$

d'où $2\sqrt{2} \leq (2p+5)u_p \leq \frac{(2p+5)\sqrt{2}}{p+1}$ 0,25

e) d'après 2 on a $\frac{2\sqrt{2}}{2p+5} \leq u_p \leq \frac{\sqrt{2}}{p+1}$ et alors

0,5 $\frac{2p\sqrt{2}}{2p+5} \leq p u_p \leq \frac{p\sqrt{2}}{p+1}$ et $\frac{2n\sqrt{2}}{2n+5} \leq n u_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$

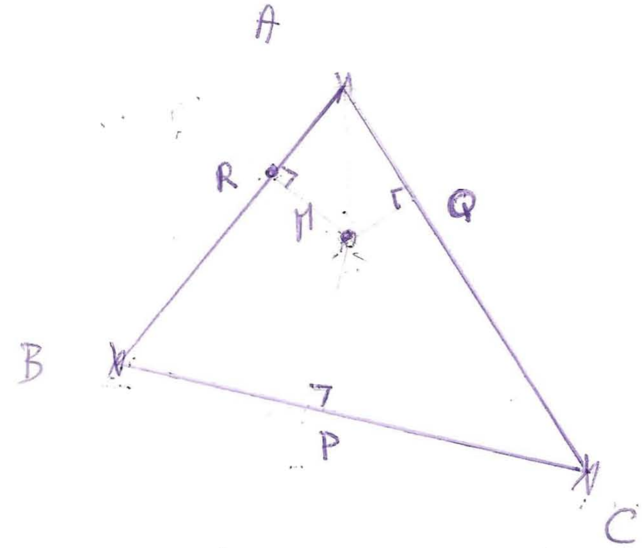
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n 2\sqrt{2}}{2n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n\sqrt{2}}{2n} = \sqrt{2}$ et $\lim \frac{n\sqrt{2}}{n+1} = \lim \frac{n\sqrt{2}}{n} = \lim \sqrt{2} = \sqrt{2}$

d'où $\lim n u_n = \sqrt{2}$ et la suite $(n u_n)_n$ CV vers $\sqrt{2}$.

II

10

Exercice 2



0,25

2°) a) les triangles ARM et AQM sont rect d'hy [AM] donc ARQM appartiennent au cercle de diamètre [AM]. 0,25

b) les triangles MPB et MRB sont rect d'hyp [BM] donc MPRB appartiennent au cercle de diamètre [BM] 0,25

3°) a) $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{QA}$ sont colinéaires donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QA}) = 0\ [\pi]$

et alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QA}) = 0\ [\pi]$ ainsi

0,5 $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR}) = -(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR})\ [\pi]$.

or M, R, Q et R cocycliques $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MR}) = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR})\ [\pi]$

d'où $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MR}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR})\ [\pi]$.

b) $P \in (CB)$ donc $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CB}$ colinéaires et $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}) = 0\ [\pi]$

$(\overrightarrow{CP}; \overrightarrow{PR}) + (\overrightarrow{PR}; \overrightarrow{CB}) = 0\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PB})\ [\pi]$

0,5

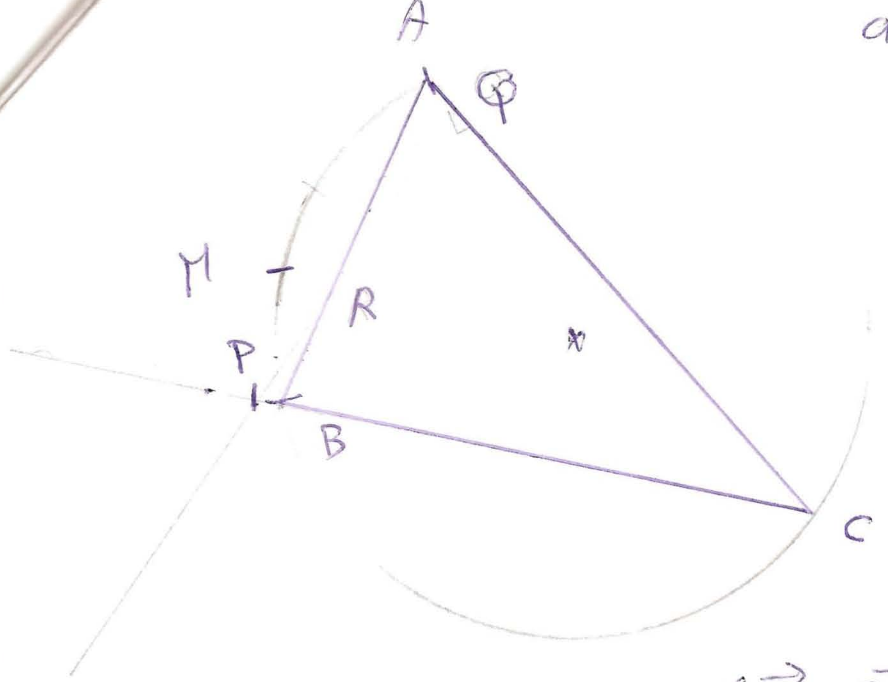
or M, P, R et B cocycliques $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PB})\ [\pi]$

d'où $(\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{CB})\ [\pi]$.

4) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MR}) + (\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MB}) =$

0,25 + 0,25 $= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{CB})\ [\pi]$

$= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR})\ [\pi]$.



a) on remarque que P, Q, R sont alignés. 0,25

0,25

b) P, Q et R alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR}) = 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [\pi]$

0,5 $\Leftrightarrow$ M, A, B, C cocycliques

$\Leftrightarrow$ M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

6)

a)

0,25

b) MBPR cocyclique 0,25

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM})\ [\pi]$

c) A, M, B, E $\in$ (C).

$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})\ [\pi]$

0,5 $= (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM})\ [\pi]$

donc $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM})\ [\pi]$

d) or $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM})\ \pi$

donc $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM})\ [\pi]$

0,5 or $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{EM})\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{EM})\ [\pi]$.

Ainsi $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) - (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{EM}) = 0\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{EA}) = 0\ [\pi]$

d'où (EA) // (PR) comme 0,25 (PR) = (D) on a (EA) // (D).

b (A) $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ **Problème** $\begin{cases} x' = x\ln a - y\ln b \\ y' = x\ln b + y\ln a \end{cases}$

$M\binom{x}{y} \mapsto M'\binom{x'}{y'}$

1°) a) $x' + iy' = (x\ln a - y\ln b) + i(x\ln b + y\ln a)$

$x' + iy' = x\ln a + ix\ln b - y\ln b + iy\ln a$

$x' + iy' = x\ln a + iy\ln a + ix\ln b - y\ln b$

$= (x+iy)\ln a + i\ln b\,(x+iy)$

$\boxed{z' = (\ln a + i\ln b)z}$ 0,1

$z' = \alpha z$ avec $\alpha = \ln a + i\ln b$

b) f est une transformation ssi $\alpha \neq 0 \iff \ln a + i\ln b \neq 0$

$\iff \ln a \neq 0$ ou $\ln b \neq 0 \iff a \neq 1$ ou $b \neq 1$

0,1 $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2} \setminus \{(1;1)\}$ non nul et $\neq 1$

2°) a) f est une homothétie ssi α est réel ssi $\ln b = 0$ ssi $b = 1$ et $a \neq 1$

0,1 $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $y = 1$ privée de $(1;1)$ et de $(e;1)$

b) f est une rotation de centre O ssi $|\alpha| = 1$

ssi $(\ln a)^2 + (\ln b)^2 = 1$

0,1 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ avec $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1 \iff (\ln y)^2 = 1 - (\ln x)^2$

$\ln y = \sqrt{1-(\ln x)^2}$ ou $\ln y = -\sqrt{1-(\ln x)^2}$

$y = e^{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ ou $y = e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$

$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ avec $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'équation

$y = e^{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ et $y = e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$

(B) 1° $g(x) = e^x - x$

a) g est déf cont et dér sur IR et $g'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$, $x \geq 0$

sur $]-\infty; 0]$ $g \searrow$ et sur $[0; +\infty[$ $g \nearrow$

x		0	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	1	$\nearrow$

0,75

1 est le min de g sur IR atteint en 0 or $1 > 0$

donc $g > 0$.

b) $\forall x \in IR$ $g(x) \geq 1 > 0$ donc $g > 0$ et l'éq $g(x) = 0$ n'admet pas de solut dans IR. 0,75

2° $(Q) = \{ M(x, y),\ x > 0 \text{ et } y > 0 \}$

φ $P \longrightarrow P$

$M\binom{x}{y} \longmapsto M'\binom{x'}{y'}$ tq $\begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^y \end{cases}$

a) Non car $\forall x \in IR$ $e^x - x \neq 0$ et $e^y - y \neq 0$ $\forall y \in IR$

donc $e^x \neq x$ et $e^y \neq y$ $\forall y \in IR$

Ainsi $\begin{cases} x = e^x \\ y = e^y \end{cases}$ n'admet pas de solut° et pas de pt inv. 0,5

b) (D) $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ $\begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln x' \\ y = \ln y' \end{cases}$ $x' > 0$, $y' > 0$

0,75 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha(\ln x') + \beta(\ln y') + \gamma = 0}$

c) Si $\alpha = 0$ on a $\beta \neq 0$ $\beta(\ln y') + \gamma = 0 \Leftrightarrow \ln y' = -\frac{\gamma}{\beta}$

$\Leftrightarrow y' = e^{-\frac{\gamma}{\beta}}$

et $\varphi(D)$ est la droite d'éq $y = e^{-\frac{\gamma}{\beta}}$. 0,5

Si $\alpha = \beta \neq 0$ on a $\alpha(\ln x') + \alpha(\ln y') + \gamma = 0$

$(\ln x') + (\ln y') = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow (\ln y') = -\frac{\gamma}{\alpha} - (\ln x')$

0,5 $y' = e^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \times e^{-\ln(x')} = e^{-\frac{\gamma}{\alpha}} e^{\ln \frac{1}{x'}} = \frac{1}{x'} e^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ et

$\varphi(D)$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x} e^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

$\mathscr{C} = \mathscr{C}(O;1)$.

$M(x,y) \in \mathscr{C} \iff x^2+y^2=1 \iff (\ln x')^2+(\ln y')^2=1$

$\iff M'\binom{x'}{y'} \in (\mathscr{C}')$ donc 0,1

$\varphi(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}')$.

2°) a) (Γ_1) $f_1(x) = e^{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ (Γ_2) $f_2(x) = e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$ $x \in [\frac{1}{e}; e]$.

f_1 et f_2 sont bien définies sur $[\frac{1}{e}; e]$ car $1-\ln^2 x \geq 0 \iff (1-\ln x)(1+\ln x) \geq 0$

$\iff x \in [\frac{1}{e}; e]$. 0,5 Dérivab. de f_1 et f_2 en $\frac{1}{e}$ et e (obligatoire)

	$\frac{1}{e}$		e	
$-$	0	$+$	0	$-$

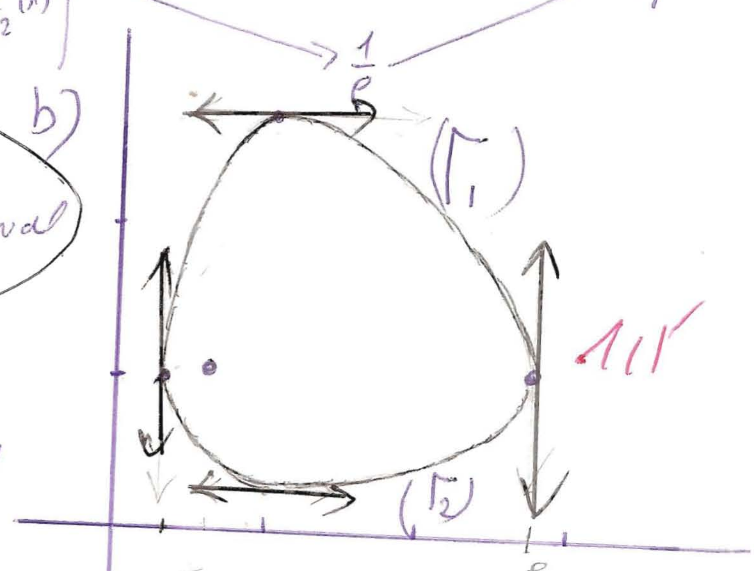
0,5 f_1 et f_2 sont dérivables sur $]\frac{1}{e}; e[$ et

0,25 $f_1'(x) = -\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\, e^{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ 0,25 $f_2'(x) = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\, e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

x	$\frac{1}{e}$		1		e
0,5 f_1'	|	$+$	0	$-$	|
f_1	1	↗	e	↘	1

x	$\frac{1}{e}$		1		e
0,5 $f_2'(x)$	|	$-$	0	$+$	||
$f_2(x)$	1	↘	$\frac{1}{e}$	↗	1

b)



T_g verticales à (Γ_1) et (Γ_2) aux pts d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e car f_1 et f_2 non dérivables

obligatoire

c) $M\binom{x}{y} \in (\mathscr{C}') \iff (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$

$\iff (\ln y)^2 = 1-(\ln x)^2$

$\iff \ln y = \sqrt{1-(\ln x)^2}$ ou $\ln y = -\sqrt{1-(\ln x)^2}$ avec $1-(\ln x)^2 \geq 0$

	$\frac{1}{e}$		e	
$-$	1	$+$	1	

$\iff y = e^{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ ou $y = e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$ 0,5 avec $x \in [\frac{1}{e}; e]$

$\iff M \in (\Gamma_1)$ ou $M \in (\Gamma_2)$

$\iff M \in (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$ d'où $(\mathscr{C}') = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$