REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2011 – MATHEMATIQUES
Série : C-E
Durée : 4 h
Coef. : 5

EXERCICE I : 5 points

1) Soit le polynôme P défini par :
$$P(z) = z^4 + (-6+i)z^3 + (17-7i)z^2 + (-26+14i)z + 20(1-i)$$
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 = -5 + 12i$.
   b) Vérifier que : $P(z) = [z^2 - (4-i)z + 5 - 5i][z^2 - 2z + 4]$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé$(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives 4; $1 + i\sqrt{3}$; $1 - i\sqrt{3}$ et 1.
   Soit (E) l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B, et d'axe focal l'axe des abscisses.
   a) Déterminer A' tel que $[AA']$ soit le grand axe de (E).
   b) Démontrer que B et C sont des sommets de (E).
   c) Trouver les foyers, les directrices associées et l'excentricité de (E).
   d) Déterminer une équation cartésienne de (E).
   e) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (E) avec l'axe des ordonnées.
   f) Tracer (E).
3) Soit f l'application affine du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1-i)z + i$.
   a) Déterminer la nature exacte de f, puis préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer l'expression analytique de f.
   c) Démontrer que f est bijective.
   d) Déterminer la nature exacte de (E') image de (E) par f.
   e) Déterminer les foyers, les directrices associées, les sommets, l'axe focal et l'excentricité de (E').

EXERCICE II : 5 points

PARTIE A :

1) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue x: (E): $3x^2 + 6x + 5 \equiv 0\ [7]$.
   a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') où :
      (E'): $3x(x+2) \equiv 2\ [7]$
   b) Recopier et compléter le tableau des congruences modulo 7 suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$3x$							
$x+2$							
$3x(x+2)$							

   c) En déduire les solutions de l'équation (E).
2) Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}^{\beta}$ dans le système de numération de base β et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.
   a) Démontrer que : $3\beta^2 + 6\beta - 2 \equiv 0\ [7]$.
   b) En déduire l'ensemble des valeurs possibles de β.
3) Vérifier que 8 est une valeur possible de β .

PARTIE B :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (x, y) suivante :

$$(F): x^2 + 10x = y^2 + 46.$$

1) Vérifier que l'équation (F) est équivalente à : $(x+5)^2 - y^2 = 71$.
2) Démontrer que 71 est premier.
3) Déterminer alors l'ensemble des solutions de (F).

PROBLEME : **10 points**

PARTIE A : **«Déterminer la fonction dérivée d'une bijection réciproque»**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = tanx$.

1) Etudier la dérivabilité de f.
2) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f; puis vérifier que $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$.

3- a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- b) Dresser le tableau complet de variation de f.
- c) Démontrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

4- a) On désigne par g la bijection réciproque de f. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

où g' désigne la fonction dérivée de g.
- b) Dresser le tableau complet de variation de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B : **« Déterminer la limite d'une fonction définie par une intégrale et donner du sens à la notation $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ».**

1) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4+x^4}$

Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$h(x) = \frac{1}{8} \times \frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{8} \times \frac{x-2}{x^2-2x+2}$$

2) Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, on pose :

$$H_1(x) = \frac{1}{8}g(x+1) \ \ et \ H_2(x) = \frac{1}{8}g(x-1)$$

a) Etudier la dérivabilité des fonctions H_1 et H_2.
b) Calculer $H_1'(x)$ et $H_2'(x)$ où H_1' et H_2' désignent respectivement les dérivées des fonctions H_1 et H_2.

3) Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{t^4+4} dt$$

a) Démontrer que G est impaire.
b) Etudier la dérivabilité de G, puis calculer $G'(x)$ où G' désigne la fonction dérivée de G.
c) Etudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.

4) En remarquant que :

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$
$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$
$$x + 2 = (x+1) + 1$$
$$x - 2 = (x-1) - 1$$

Démontrer que l'on a :

$$G(x) = \frac{1}{16} ln\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right) + \frac{1}{8} g(x + 1) + \frac{1}{8} g(x - 1)$$

5) On définit $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} dx$ par :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^4 + 4} dt$$

Calculer alors : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4} dx$

PARTIE C : « **Etude d'une suite numérique** »

1) On désigne par (U_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 1}$$

a) Donner la valeur exacte de U_1et U_2.
b) Déterminer le signe de (U_n).
c) Etudier le sens de variation de (U_n).

2) En exploitant le sens de variation de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x de l'intervalle $[n; n + 1]$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{(n + 1)^2 + 1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2 + 1} dx$$

En déduire que : $U_n \leq \int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx$.

3) Démontrer que la suite (U_n)est convergente et que :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n \leq \frac{\pi}{2}$$