40

REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2008– MATHEMATIQUES

Série : C-E

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

Pendant la résolution des exercices et problème, tout résultat non établi par le candidat peut être admis pour la suite

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements ainsi que la propreté seront prises en compte lors de l'appréciation des copies

EXERCICE I:

Les suites d'entiers naturels (a_n) et (b_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$a_0 = 3 \text{ et } a_{n+1} = 2a_n - 1 \qquad b_0 = 1 \text{ et } b_{n+1} = 2b_n + 3$$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n = 2^{n+1} + 1$.

2) a_n et a_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier n ?

3) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5, en utilisant la congruence modulo 5.

4-a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2a_n - b_n = 5$.

b) En déduire les valeurs possibles du $PGCD(a_n, b_n)$.

EXERCICE II :

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique $2cm$

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point M, d'affixe z, associe le point M' d'affixe $2z - z^2$.

L' objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M' lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi ; \pi]$ et M le point de (C) d'affixe $z = e^{it}$.

1-a) Démontrer que l'image M' de M par F est le point de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad t \in [-\pi ; \pi]$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ)

b) Pour $t \in [-\pi ; \pi]$, comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part. En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera. Justifier que l'on peut étudier (Γ) sur $[0 ; \pi]$.

c) Montrer que pour $t \in [0 ; \pi]$,

$$x'(t) = 2\sin t(2\cos t - 1) \quad \text{et} \quad y'(t) = -2(\cos t - 1)(2\cos t + 1)$$

où x' et y' sont respectivement les fonctions dérivées de x et de y

d) En déduire le sens de variations des fonctions x et y sur $[0 ; \pi]$

e) Donner le tableau de variation de x et y

2-a) Démontrer que si t est différent de 0 alors la tangente à (Γ) au point M' de paramètre t est dirigée par le vecteur de coordonnées : $\left(\cos\frac{3t}{2} ; \sin\frac{3t}{2}\right)$ (On pourra utiliser

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos p - \cos p = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right))$$

On admettra que ce résultat est encore valable quand t est nul.

b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à la tangente à (Γ) en M'.

c) Déterminer et placer points de (Γ) sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées.

3-) Construire (Γ) sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

PROBLEME: Etude d'une fonction définie par une intégrale.

L'objectif de ce problème est d'étudier et de déterminer la primitive G sur IR de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{1+t^2}}$ et qui s'annule en 0.

PARTIE A: Etude des variations de G et recherche de l'expression de $G(x)$.

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2\sqrt{1+t^2}}$.

1- a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

b) On rappelle que si f est une fonction continue et paire définie sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel a de $\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$.

Démontrer alors que G est une fonction impaire.

c) Déterminer le sens de variation de G.

2- a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;+\infty[$: $\dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

b) Soit x un réel de $[0\ ;+\infty[$. Déduire par intégration sur $[O\ ;x[$ de l'inégalité précédente que l'on a : $\frac{1}{2}\ln(1+x) \leq G(x)$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$; puis en déduire la limite de $G(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

d) Dresser le tableau complet des variations de G.

e) Démontrer que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle **J** de $\mathbb{R}$ à préciser (on rappelle que $\mathbb{R}$ est intervalle de $\mathbb{R}$).

3- **Soit F la bijection réciproque de G.**

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $F'(x) = 2\sqrt{1+(F(x))^2}$. ($F'$ désigne la fonction dérivée de F sur $\mathbb{R}$).

b) En déduire que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que F est solution de l'équation différentielle (E) $y'' - 4y = 0$

c) Déterminer $G(0)$, $F(0)$ et $F'(0)$

4- a) Résoudre sur IR l'équation différentielle (E) $y'' - 4y = 0$.

b) Déterminer l'unique solution Φ de (E) sur IR vérifiant . $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0) = 2$

c) Déterminer alors $F(x)$

5- **On admet que pour tout réel $y : (y+\sqrt{y^2+1}) > 0$.**

a) Démontrer que pour tout réel y ; l'équation $F(x)=y$ admet pour unique solution dans $\mathbb{R}$ $x=\frac{1}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

b) En déduire alors $G(x)$.

PARTIE B: **Etude du comportement asymptotique de G au voisinage de $+\infty$.**

1- On pose pour tout $t \geq 1$ et tout $x \geq 1$: $h(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $H(x)=\int_1^x h(t)dt$.

a) Que représente la fonction H pour h ?

b) Vérifier que : $h(t)=\dfrac{1}{t(t+\sqrt{1+t^2})(\sqrt{1+t^2})}$.

c) **On admet que pour tout $t \geq 1$: $\sqrt{1+t^2} \geq t$.** Démontrer que pour tout $t \geq 1$, on a : $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{2t^3}$.

d) Déterminer alors le sens de variation de H puis démonter que pour tout $x \geq 1$, on a : $0 \leq H(x) \leq \frac{1}{4}$. En déduire que $H(x)$ admet une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$. (On ne demande pas de calculer cette limite).

2- a) En utilisant la définition respectivement de $G(x)$ et $\ln x$ par une intégrale, démontrer que pour tout $x \geq 1$: $G(x)-\frac{1}{2}\ln x=\frac{1}{2}\left[\ln(1+\sqrt{2})-H(x)\right]$.

b) En déduire que $G(x)-\frac{1}{2}\ln x$ admet une limite finie L quand x tend vers $+\infty$.

c) En utilisant l'expression algébrique de $G(x)$, vérifier que $L=\frac{1}{2}\ln 2$.

d) Déterminer alors la limite de la fonction H en $+\infty$.