40

REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2007– MATHEMATIQUES

Série : C-E

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

EXERCICE 1: (5 points)

Le Plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On donne $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $O'\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

On désigne par g l'application affine de (P) vers (P) telle que : $g(A)=A'$; $g(B)=B'$; $g(O)=O'$.

1-Déterminer l'expression analytique de g.

2- Démontrer que g est bijective.

3- Soit h l'application affine de (P) vers (P) d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -2x+5y+4 \\ y' = -x+2y+2 \end{cases}$$

Déterminer $h(A')$, $h(B')$ et $h(O')$. En déduire alors que $h=g^{-1}$ où g^{-1} désigne la bijection réciproque de g.

4- (D) est une droite du plan d'équation cartésienne $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (α,β,γ sont des nombres réels tels que $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$).

a) Déterminer en fonction de α,β et γ une équation cartésienne de (D') image de (D) par g.

b) Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles.

5- Pour tout point M du plan, on pose: $M_1=g(M)$; $M_2=g(M_1)$ et $M_3=g(M_2)$.

a) Déduire du 4)b) que si les points M, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux alors ils ne sont pas alignés.

b) Démontrer que l'écriture complexe de $g\circ g$ est $z'=-z+6+2i$.

c) Déterminer alors l'ensemble des points invariants par $g\circ g$.

d) Vérifier que $g\circ g$ est la symétrie de centre $I\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; puis déterminer $g\circ g\circ g\circ g$.

(On rappelle que $g\circ g\circ g\circ g=(g\circ g)\circ(g\circ g)$**)**

6- a) En remarquant que pour tout point M du plan : $M_2=(g\circ g)(M)$ et $M_3=(g\circ g)(M_1)$; démontrer que I est isobarycentre de M, M_1, M_2 et M_3.

b) Démontrer alors que $\overrightarrow{g(I)M}+\overrightarrow{g(I)M_1}+\overrightarrow{g(I)M_2}+\overrightarrow{g(I)M_3}=\vec{0}$.

c) Démontrer que $g(I)=I$.

d) Démontrer que I est l'unique point invariant par g.

EXERCICE 2: **(5 points)**

Le Plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f une application définie du plan (P) dans lui-même qui au point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = y+4 \\ y' = x-2 \end{cases}$

1- a) Déterminer l'écriture complexe de f.

b) f est –il un déplacement ou un anti-déplacement?

c) Quel est l'ensemble des points invariants par f ?

d) En déduire la nature exacte de f.

2- Déterminer l'expression analytique de $f \circ f$. Quelle est alors la nature exacte de $f \circ f$?

3- On admet que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{w}$ et t la translation de vecteur $\vec{w}$

a) Démontrer que $f \circ f = t \circ t$.

b) Déterminer les coordonnés de K le milieu de $\left[OO'\right]$ où O' est l'image de O par f.

c) En déduire les éléments caractéristiques de f (On donnera les coordonnées de $\vec{w}$ et une équation cartésienne de (Δ)).

4- On considère maintenant l'ensemble (E) défini par son équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = 4\cos^2\theta - 2 \\ y(\theta) = 3\sin 2\theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in \mathrm{IR} \text{ (Indication : } 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta\text{)}$$

a) Déterminer une équation cartésienne de (E), puis préciser sa nature et ses éléments caractéristiques **(on indiquera uniquement les sommets).**

b) Ecrire une équation cartésienne de l'image de (E) par f.

c) Reconnaître l'ensemble obtenu et le construire dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

PROBLEME : **(10 points)**

PARTIE A:

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, on considère la suite géométrique $(u_n)_{(n\in\mathrm{IN})}$ de premier terme $u_0 = \cos a$ et de raison $\sin a$.

1- a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

b) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{(n\in\mathrm{IN})}$.

2- Soit $(S_n)_{(n\in\mathrm{IN})}$ la suite de terme général $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n et de a

b) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(on distinguera les cas où (u_n) est constante à partir d'un certain rang et les cas où (u_n) est non constante à partir d'un certain rang)

PARTIE B:

Le plan **(P)** est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Unités graphiques :

- 4 cm pour 1 unité en ordonnée
- 6 cm pour $\frac{\pi}{2}$ en abscisse

$\Omega(\frac{3\pi}{2}\ ;\ 0)$ désigne un point de **(P).**

1- Soit S_0 la fonction définie sur $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ par : $S_0(x)=\cos x$.

Dresser le tableau de variations complet de S_0, puis construire (C_0) la courbe représentative de la fonction S_0 dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

2- Soit S_1 la fonction définie sur $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ par : $S_1(x)=\cos x+\cos x\sin x$.

a) Etudier la dérivabilité de S_1, puis calculer $S_1'(x)$ pour tout x élément de $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ où S_1' désigne la fonction dérivée de S_1.

b) Vérifier que pour tout x élément de $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ $S_1'(x)=(\sin x+1)(1-2\sin x)$.

c) Etudier le sens de variation de S_1, puis dresser son tableau complet de variations

3- Soit S la fonction définie sur $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ par $S(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.

a) Etudier la dérivabilité de S, puis calculer $S'(x)$ pour tout x élément de $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ où S' désigne la fonction dérivée de S.

b) Vérifier que $S'(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$ pour tout x élément de $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

c) Etudier le sens de variation de S, puis dresser son tableau complet de variations

4- a) Démontrer pour $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ les inégalités : $S_1(x)\le S(x)\le S_0(x)$.

b) Tracer les courbes (C_1) et (C) représentatives respectivement de la fonction (S_1) et de la fonction S dans le même repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE C:

1- a) Calculer $S(\frac{3\pi}{2})$; $S'(\frac{3\pi}{2})$.

b) Démonter que S est une bijection de $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ sur un intervalle **J** à préciser.

2- Etudier la dérivabilité de S^{-1} la bijection réciproque de S ; puis déterminer $(S^{-1})'(0)$.

PARTIE D:

Pour tout nombre entier naturel n, on considère la fonction S_n définie sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ par $S_n(x) = \cos x(1+\sin x+.....+\sin^n x)$, et on pose : $I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)dx$.

1- a) Justifier l'existence de I_n

b) Démonter que (I_n) est à termes positifs.

c) Calculer I_0, I_1, ainsi que $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x)dx$.

d) vérifier que $I_1 \le I \le I_0$.

2- a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

b) En déduire que $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{1+n}$.

3- Soient $(A_n)_{(n\in \mathrm{IN})}$ et $(B_n)_{(n\in \mathrm{IN})}$ les suites numériques définies par : $A_n = I_{2n}$ et $B_n = I_{2n+1}$.

Démontrer alors que :

a) La suite (A_n) est décroissante ;

b) la suite (B_n) est croissante ;

c) la suite de terme général $A_n - B_n$ converge vers 0.

4- a) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x appartenant à $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ on a : $S(x) - S_n(x) = (\sin x)^{n+1} S(x)$, puis que : $S_{2n+1}(x) \le S(x) \le S_{2n}(x)$.

b) En déduire que, pour tout entier n . $B_n \le I \le A_n$.

c) Démontrer que (A_n) et (B_n) convergent vers I.

Pendant la résolution des exercices et du problème tout résultat non établi par le candidat peut être admis pour la suite. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.