REPUBLIQUE GABONAISE | **DEUXIEME SESSION-2004**
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT | **1 – MATHEMATIQUES**

Séries : C et E
Durée : 4 heures
Coef. : 5

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ACB tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$. On note (Δ) la droite orthogonale à (AB) passant par C et I le point de (Δ) tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{4}$. Enfin, on note s la similitude directe de centre A qui transforme C en I et s' la similitude directe de centre B qui transforme I en C.

1° a) Placer les points A, B, C et I sur une figure.

b) Prouver que $r = s \circ s'$ est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

c) Déterminer le centre de cette rotation.

2° Soit M un point du plan, distinct des points A, B et C, on lui associe le point $N = s(M)$

a) Déterminer l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$.

b) On note σ la similitude directe de centre A qui transforme C en M. Montrer que $\sigma \circ s = s \circ \sigma$. En déduire l'image du point I par σ. Préciser l'image par σ du triangle ACI puis en déduire que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = -\frac{\pi}{6}$. Donner alors une construction géométrique du point N pour un point M donné.

c) Placer les points M et N sur la figure

3° Au point M du plan, précédemment considéré, on associe le point P tel que $s'(P) = M$.

a) Déterminer l'angle $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM})$.

b) En notant σ' la similitude directe de centre B qui transforme I en P, comparer $\sigma' \circ s'$ et $s' \circ \sigma'$. Déterminer l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MP})$ puis expliquer pour le point M donné une construction du point P tel que $s'(P) = M$.

c) Placer aussi le point P sur la figure

4° Prouver en exploitant les résultats du 1° que $IP = IN$ et que $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 : (4 points)

1° Montrer que, pour tout entier naturel n, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.

2° On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1°, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire que le couple $(5\,;-14)$ est une solution de l'équation $87x + 31y = 1$ puis trouver une solution $(x_0\,;\,y_0)$ de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c) ***Application :*** Déterminer les points de la droite d'équation : $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont les abscisses sont comprises entre 0 et 100.

Problème **(11 points)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -e^{\sqrt{x}}$. On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan orienté $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, unité graphique 2 *cm*.

1° a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0\,;+\infty[$ et calculer pour tout réel x de cet intervalle $f'(x)$, où la fonction f' désigne la fonction dérivée de f. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

b) Préciser le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$ Etudier la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

2° Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point A d'abscisse 1.

3° Soit φ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(t) = et - e^t$ et g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = -e^{\sqrt{x}} + \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$.

a) Etudier les variations de φ sur $[0\,;+\infty[$ puis donner le signe de $\varphi(x)$.

b) Si g' est la fonction dérivée de g, montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $$g'(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

c) Déduire des questions précédentes le sens de variation de g et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Etudier alors la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa tangente (T) au point A.

4° Construire dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ la droite (T), la tangente à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0 et la courbe $(\mathscr{C})$.

5° On note $(\mathscr{D})$ la partie du domaine plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des ordonnées et la droite (Δ) d'équation : $y = -e$.

Si $\mathcal{A}$ désigne en unités d'aire, l'aire du domaine $(\mathscr{D})$ justifier que :

$$\mathcal{A} = e + \int_0^1 f(x)\,dx\ .$$

Partie B

Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

1° Si M est un point du plan d'affixe $z = x + iy$ et M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$, son image par r , exprimer z' en fonction de z et en déduire x' et y' en fonction de x et y.

2° Soit $(\mathscr{C}')$ l'image de $(\mathscr{C})$ par la rotation r . Montrer que $(\mathscr{C}')$ est la courbe représentative de la fonction F définie sur $[1\,;+\infty[$ par $F(x) = (\ln x)^2$.

3° On admet que l'image de $(\mathscr{D})$ par la rotation r est la partie $(\mathscr{D}')$ du plan comprise entre $(\mathscr{C}')$ et les images par r de la droite (Δ) et de l'axe des ordonnées.

a) Etudier les variations de F et la limite de F en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de F.

b) Construire sur le même graphique que la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (T') image de (T) par r et la courbe $(\mathscr{C}')$.

c) Justifier avec des considérations géométriques que l'aire de $(\mathscr{D})$ est égale à l'aire de $(\mathscr{D}')$. que l'on calculera en unités d'aire, à l'aide de deux intégrations par parties. En déduire alors : $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$.

Partie C

On se propose dans cette partie de calculer $I = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$ *d'une autre manière. On appelle* h *la fonction définie sur* IR^+ *par* $h(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt$ *et* k *la fonction définie sur* IR *par* $k(x) = x^2$. *On note* ψ *la fonction* $h \circ k$ *définie sur* IR .

1° a) Calculer $\psi(0)$.

b) Justifier la dérivabilité de ψ sur IR et montrer, pour tout x réel que : $\psi'(x) = 2xe^x$.

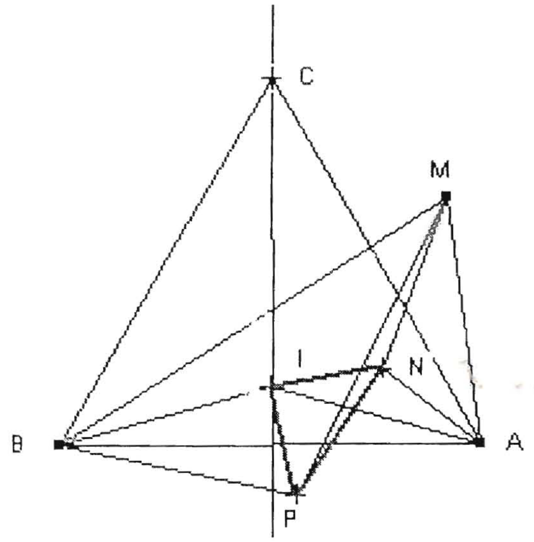
c) En déduire , pour tout x réel que : $\psi(x) = 2(x-1)e^x + 2$.

2° Calculer alors : $I = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$.

Corrigé *Deuxième session* **1- Math**

Exercice 1

1° a) Figure 0,25



b) La similitude s a pour mesure d'angle $+\frac{\pi}{4}$, mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$, son rapport est $\frac{AI}{AC}$. La similitude s' a pour angle $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC})$ et pour rapport $\frac{BC}{BI}$. La réflexion d'axe Δ conserve les distances et oppose les angles. Il s'ensuit que : $\frac{BC}{BI}=\frac{AC}{AI}$ et que : $(\overrightarrow{BI}\,;\,\overrightarrow{BC})=-(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$. Ainsi r est la composé de deux similitudes de rapports inverses ; c'est une similitude de rapport 1 donc une rotation. Son angle est la somme des angles des deux similitudes et a don c pour mesure $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{2}$. 0,5

c) On a $r(I)=s\circ s'(I)=s(C)=I$. Donc I est le centre de la rotation r 0,25

2° a) Comme s est la similitude directe de centre A qui transforme M en N, l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$ est l'angle de cette similitude et a pour mesure $\frac{\pi}{4}$. 0,25

b) On a $\sigma\circ s=s\circ\sigma$ car σ et s sont deux similitudes de même centre. Par ailleurs $\sigma\circ s(C)=\sigma(I)$ d'une part et d'autre part $s\circ\sigma(C)=s(M)=N$. Ainsi $\sigma(I)=N$. Le triangle ACI a par suite pour image le triangle AMN par la similitude σ. Les similitudes conservant les angles on a $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MN})=(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CI})=-\frac{\pi}{6}$. 1,5

On exploite les deux égalités suivantes pour construire N. $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AN})=\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MN})=-\frac{\pi}{6}$ en se donnant un point M du plan.

c) (Voir la figure) 0,25

3° a) Comme s' est la similitude directe de centre B qui transforme P en M, l'angle $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM})$ est l'angle de cette similitude et a pour mesure $\frac{\pi}{4}$. 0,25

b) On a $\sigma' \circ s' = s' \circ \sigma'$ car σ' et s' sont deux similitudes de même centre. Par ailleurs $\sigma' \circ s'(I) = \sigma'(C)$ d'une part et d'autre part $s' \circ \sigma'(I) = s'(P) = M$. **1,25**
Ainsi $\sigma'(C) = M$. Le triangle BCI a par suite pour image le triangle BMP par la similitude σ'. Les similitudes conservant les angles on a $(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CI}) = \frac{\pi}{6}$.

On exploite les deux égalités suivantes pour construire P. $(\overrightarrow{BP} ; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4}$ et

$(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{6}$ en se donnant un point M du plan.

c) (Voir la figure) **0,25**

4° Pour tout point M du plan d'image N par s, et d'antécédent P par s', on a **0,5**
$r(P) = s \circ s'(P) = s(M) = N$. Comme r est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$,

on a bien : $IP = IN$ et $(\overrightarrow{IP} , \overrightarrow{IN})$

Exercice 2

1° Comme pour tout entier relatif n, on a : $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 1$, alors on peut dire (théorème de Bézout) que les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. **1**

2° a) On a : $87 = 14 \times 6 + 3$ et $31 = 5 \times 6 + 1$. Ainsi 87 et 31 sont premiers entre eux. **1**
Par suite en prenant $(u ; v) = (5 ; -14)$, on a l'égalité $87u + 31v = 1$ vérifiée et en prenant $(x_0 ; y_0) = (10 ; -28)$, on a une solution particulière de (E).

b) Puisque $(x_0 ; y_0)$ est solution de (E), un couple $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $87x + 31y = 87x_0 + 31y_0$ soit $87(x - x_0) = 31(y_0 - y)$. Ainsi si un couple $(x ; y)$ est solution de (E), alors 87 divise $31(y_0 - y)$ et comme 87 et 31 sont premiers entre eux, 87 divise $y_0 - y$. Il existe donc un entier relatif k tel que (théorème de Gauss) $y_0 - y = 87k$ et il s'ensuit que $x - x_0 = 31k$. Ainsi $(x ; y) = (10 + 31k ; -28 - 87k)$. Réciproquement si $(x ; y) = (10 + 31k ; -28 - 87k)$, alors (E) est vérifiée. Donc l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(10 + 31k ; -28 - 87k)$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$. **1**

c) *Application :* Il faut remarquer ici qu'un point $M(x ; y)$ à coordonnées entières appartient à la droite donnée si et seulement si le couple $(x ; -y)$ est solution de (E). On cherche donc les points $M(x ; y)$ tels que $\begin{cases} x = 10 + 31k \\ y = 28 + 87k \\ 0 \le x \le 100 \end{cases}$. **1**

Trois valeurs de k sont possibles 0, 1 et 2. d'où les trois points $M_1(10 ; 28)$; $M_2(41 ; 115)$ et $M_3(72 ; 202)$

Problème

Partie A (5,5 points)

1° a) *Dérivabilité de f*

- La fonction f est la composée des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $x \mapsto -e^{x}$, dérivable sur IR. Elle est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ 0,25 + 0,25
- On a pour tout réel strictement positif x, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{-e^{\sqrt{x}}+1}{x} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$. Or $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -\dfrac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{h}-1}{h} = 1$; donc $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. 0,5

b) *Variations de f*

- Sur $]0\,;+\infty[$ la dérivée de f est strictement négative. La fonction f est donc strictement décroissante sur son ensemble de définition 0,25
- Par ailleurs on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ 0,25
- *Tableau de variation* 0,25

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	**-1** ↘	$-\infty$

2° *Equation de la tangente* (T)

La tangente (T) a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\dfrac{e}{2}(x-1) + (-e)$ 0,5

soit $y = -\dfrac{e}{2}x - \dfrac{e}{2}$

3° *Position relative de la courbe et de la tangente* (T)

a) *Variations de φ*

La fonction φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\varphi'(t) = e - e^{t}$. Ainsi elle admet sur $]0\,;+\infty[$, un maximum absolu égal à 0 en 1 0,25

b) *Calcul de g'(x)*

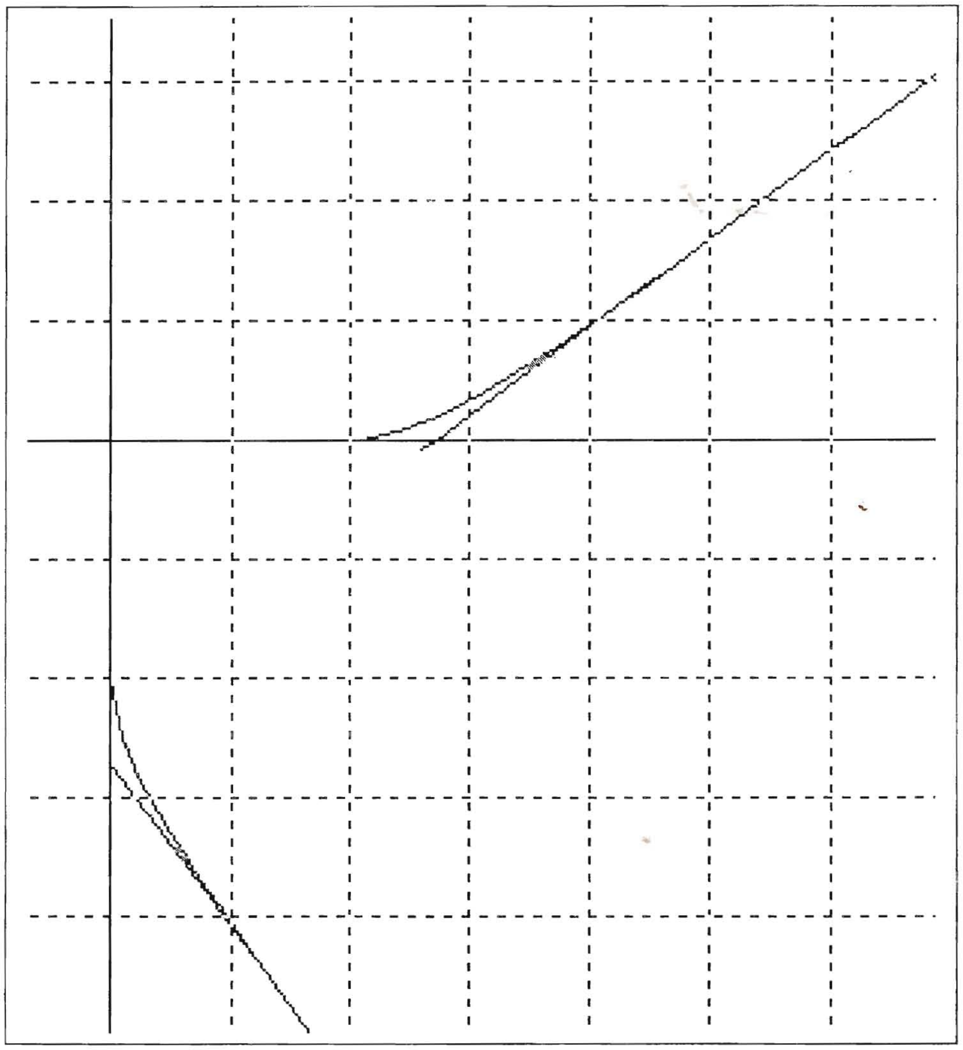
La fonction g est bien dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = -\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{e}{2} = \dfrac{e\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\varphi(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. 0,5

c) *Conclusion*

La fonction g' a le même signe sur $]0\,;+\infty[$ que $\varphi(\sqrt{x})$. Or on a $\varphi(t) \leq 0$ sur $]0\,;+\infty[$. Donc g' est négative sur $]0\,;+\infty[$, ne s'annulant qu'en 1. La fonction g est strictement décroissante et s'annule en 1. Donc sur $]0\,;1]$ on a $g(x) \geq 0$ et sur 1

$[\,1\,;+\infty\,[$ on a $g(x) \leq 0$ Comme $g(x) = f(x) - (-\frac{e}{2}x - \frac{e}{2})$, on peut conclure que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la tangente (T) sur $]\,0\,;1\,]$ puis passe en dessous de cette dernière sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Ainsi le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$

4° *Courbe esquissée*



0,75

5° *Justification d'une écriture*

On peut considérer le domaine $(\mathscr{D})$ comme la partie du plan, ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $-e \leq y \leq f(x)$. En unités d'aire on a l'aire de $(\mathscr{D})$ égal à $\mathscr{A}$ avec $\mathscr{A} = \int_0^1 (f(x) - (-e))\,dx = [\,e\,x\,]_0^1 + \int_0^1 f(x)\,dx$. On a bien $\mathscr{A} = e + \int_0^1 f(x)\,dx$.

0,75

Partie B **(3 points)**

1° *Définition analytique de* r .

Pour tout point M d'affixe z, d'image M' d'affixe z', on a $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = i\,z$. Il s'ensuit 0,5
que $x' + i\,y' = i\,(x + i\,y) = -\,y + i\,x$. On a donc $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

2° *Equation de l'image de* $(\mathscr{C})$ par r .

Pour tout point $M(x\,;\,y)$ d'image $M'(x'\,;\,y')$, dire que M décrit $(\mathscr{C})$ signifie que x varie sur IR^+ et que $y = -e^{\sqrt{x}}$. Ce qui équivaut à y décrit $]-\infty\,;\,-1]$ et $-x' = -e^{\sqrt{y'}}$ soit x' décrit $[1\,;\,+\infty[$ et $x' = e^{\sqrt{y'}}$ soit x' décrit $[1\,;\,+\infty[$ et $\sqrt{y'} = \ln(x')$. soit enfin 0,5
$y' = (\ln x')^2$ pour x' décrivant $[1\,;\,+\infty[$. L'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par r est donc bien la courbe représentative de la fonction F définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (\ln x)^2$.

3° a) *Variations de* F

- La fonction F est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle on a : $F'(x) = 2\,\frac{1}{x}\ln x = 2\frac{\ln x}{x}$. Sur $[1\,;\,+\infty[$ la dérivée reste positive donc la fonction F est strictement croissante sur cet intervalle. 0,5
- F a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ 0,25
- On a donc comme *tableau de variation* : 0,25

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	**0**	$+$	
f	**0**	$\nearrow$	$+\infty$

b) (Voir figure) 0,5

c) *Calcul de l'aire de* $(\mathscr{D}')$

Cette aire est en unités d'aire $\int_1^e (\ln x)^2 dx = [\,x(\ln x)^2\,]_1^e - 2\int_1^e \ln x\, dx$. Avec une deuxième intégration par parties on trouve $e - 2[\,x\ln x - x\,]_1^e = e - 2$ 1

Déduction de I

On a : $\mathcal{A} = e - I$, or $\mathcal{A} = e - 2$ donc $I = 2$

Partie C **(2,5 points)**

1° a) *Calcul de* $\psi(0)$ 0,5

On a immédiatement $\psi(0) = 0$

b) La fonction ψ est une composée des fonctions h et k dérivables ; elle est dérivable sur IR et $\psi'(x) = k'(x)\times h'[k(x)\} = 2x.e^x$. 0,5

c) Ainsi la fonction ψ est la primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^x$ et qui s'annule en 0 soit $\int_0^x 2te^t dt = [2te^t]_0^x - 2\int_0^x e^t dt = 2xe^x - 2[e^t]_0^x = 2xe^x - 2(e^x - 1)$. On a bien 1
$\psi(x) = 2(x - 1)e^x + 2$.

2° *Calcul de* I 0,5

On a $I = \psi(1) = 2$