REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2004 –1- MATHEMATIQUES

Série : C- E

Durée : 4 heures

Coef. : 5

Exercice 1 (5 points)

Soit A et B, deux points distincts du plan tels que AB = 6 cm et O le milieu de [AB] ; A' et B' sont les points du plan tels que les triangles AOA' et BOB' soient directs et rectangles respectivement en A et B, on prendra : OA' = OB' = 6 cm.

1°) Placer A' et B' puis montrer que O est le milieu de [A'B'].

2°) Soit s la similitude plane directe qui transforme A en A' et B en B'.

a) Justifier que s(O) = O.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de s.

3°) Soit M un point du plan distinct de O, M' son image par s.

a) Montrer que le triangle OMM' est rectangle en M en calculant $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{MM'}$ ($\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$).

b) En déduire une méthode géométrique de construction de M' connaissant M.

4°) On considère le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe avec $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

a) Déterminer les affixes de A, B, A', B'.

b) Déterminer l'écriture complexe de s puis retrouver ses éléments caractéristiques.

c) Donner l'expression analytique de s.

5°) Soit (Γ) la conique de centre O, de foyer F(5 ;0), de directrice la droite D d'équation $x = \frac{9}{5}$ et d'excentricité $e = \frac{5}{3}$.

a) Déterminer l'équation réduite de (Γ) et construire (Γ).

b) Donner la nature exacte de (Γ') image de (Γ) par s, puis donner ses éléments caractéristiques.

c) Que représente A' et B' pour (Γ') ?

Exercice2 (4 points)

On considère l'équation (E) : $11x + 2y = 94$ où x et y sont des entiers relatifs.

1°) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

2°) Soit n un entier naturel tel qu'il existe couple (a ; b) d'entiers relatifs vérifiant :

$n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$.

a) Démontrer que le couple (a ; – b) est solution de l'équation (E).

b) Quel est le reste de la division de n par 22 ?

3°) α et β sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. HOVONO est né en $\overline{19\alpha\beta}^{10}$. En 2004, son âge est curieusement égal à la somme des chiffres de son année de naissance.

a) Exprimer l'âge de HOVONO en 2004 de deux manières différentes.

b) En déduire son âge en 2004.

Problème.(11 points)

Partie A

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (a ;0), B (0 ;2) et C (0 ;-2a) où a est un réel non nul.

1°) Justifier que (O, A, B) est un repère du plan.

2°) Soit f_a l'application affine définie de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que :

$$f_a(A) = A, \quad f_a(B) = B, \quad f_a(O) = C.$$

a) Soit M un point de la droite (AB), exprimer M comme barycentre des points A et B.

b) En déduire que tout point de la droite (AB) est invariant par f_a.

3°) On considère φ_a l'application linéaire associée à f_a.

a) Démontrer que :

$$\varphi_a(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \varphi_a(\vec{j}) = (a+1)\vec{j}.$$

b) En déduire l'expression analytique de f_a.

4°) a) Calculer les coordonnées de $f_a \circ f_a(M)$ où M est un point de coordonnées (x ;y).

b) Montrer qu' il existe une unique valeur b pour laquelle : $f_b \circ f_b = Id_{\mathscr{P}}$.

c) Quel est l'ensemble ($\mathscr{D}$) des points invariants par f_b.

d) Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P}$ et M' son image par f_b, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et le milieu de [MM'] appartient à ($\mathscr{D}$).

e) En déduire la nature exacte de f_b.

5°) On suppose que a appartient à $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$ démontrer que f_a est bijective.

6°) Soit M (x ; y) un point quelconque qui n'appartient pas à la droite (AB) et M' son image f_a.

a) Déterminer une équation de la droite (AB).

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, en déduire que M et M' sont distincts et que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

c) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection des droites (MM') et (AB).

d) Calculer le nombre réel k tel que : $\overrightarrow{HM'} = k\,\overrightarrow{HM}$ et montrer que k est indépendant de M et caractériser f_a. (on distinguera les cas a = -1 et a ≠ -1)

Partie B

Soit u l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$u(x) = x + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) Etudier les variations de la fonction v définie par :

$v(x) = x^2 + 1 - \ln x$

b) En déduire le signe de v suivant les valeurs de x.

2°) a) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$. Etudier la position de la courbe par rapport à son asymptote (D).

c) Tracer (D) et $(\mathscr{C})$ avec soin.

3°) On appelle $(\mathscr{C}')$ la transformée de $(\mathscr{C})$ par f_{-2}.

a) Représenter $(\mathscr{C}')$ à partir de $(\mathscr{C})$.

b) Ecrire l'équation de la courbe $(\mathscr{C}')$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On notera h la fonction dont le représentation graphique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $(\mathscr{C}')$.

c) Calculer les aires des domaines (Δ_1) et (Δ_2) ensemble des points dont les coordonnées (x ; y) vérifient :

$(\Delta_1) : \begin{cases} 1 \leq x \leq m \\ x + 2 \leq y \leq u(x) \end{cases}$ $\quad (\Delta_2) : \begin{cases} 1 \leq x \leq m \\ h(x) \leq y \leq x + 2 \end{cases}$

m étant un réel strictement plus grand que 1. Que constatez-vous ?

Mathématiques : Séries C & E- session 2004

Guide pour la correction et l'harmonisation

N.B. Ceci n'est pas un corrigé détaillé. Les professeurs qui corrigent dans cette série doivent au préalable résoudre individuellement le problème, avant de prendre connaissance de ce document. <u>C'est pendant l'harmonisation que tous les détails seront discutés.</u>

Exercice 1 (5 points).

1°) **Placer les points A' et B', puis montrer que O est le milieu de [A'B']**

Les candidats doivent démontrer que AA'BB' est un parallélogramme,

O milieu d'une diagonale et conclure. $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

2°) a) **Justifier que s(O) = O**

Utiliser la conservation du milieu d'un segment. $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

b) **Les éléments caractéristiques de la similitude s** (Justifications exigées)

s similitude de centre O de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

3°) a) **Montrer que OMM' est un triangle rectangle en M**

Le calcul $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MM'}$ conduit au résultat (utiliser l'expression du produit scalaire avec le cosinus). $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

b) **méthode de construction de M' pour M ≠ O**

M' appartient à la perpendiculaire à (OM) passant par M

tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{3}$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

4°) a) **Affixes des points** Il est évident que

A(-3), B(3), A'($-3 + 3i\sqrt{3}$) et B'($3 - 3i\sqrt{3}$) (sans justification). $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

b) **Ecriture complexe de s**

$z' = (1-i\sqrt{3})\,z$ Calculs détaillés exigés $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

On retrouve que O est le point invariant,

- le rapport est $|1 - i\sqrt{3}| = 2$
- l'angle $\theta = \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

c) **Expression analytique de s**, au point M(x, y) s associe M'(x', y') tel que

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}$$ calculs détaillés exigés. $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

5°) a) **Détermination de l'équation réduite de la conique Γ et construction**

Connaissant e(excentricité) et c(distance focale) on calcule a et b on trouve

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

Construction on a besoin des sommets et des asymptotes. $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

b) **Nature exacte de s(Γ) = Γ ', éléments caractéristiques de Γ '**

L'image d'une conique par une similitude est une conique de même nature.

Les foyers $F'_1 = s(F_1) = (5\,,\,-5\sqrt{3})$ et $F'_2 = s(F_2) = (-5\,,\,5\sqrt{3})$.

D' = s(D) a pour équation : $5x + 5y\sqrt{3} - 36 = 0$ $\boxed{0{,}75 \text{ pt}}$

c) **A' et B' représentent les sommets de Γ '** $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

Exercice 2 (4 points)

(E) $11x + 2y = 94$

1) a) une solution particulière de (E) (8 ,3) $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

(toute autre solution est acceptée) par ex (-94 ; 564).

b) Résolution de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

résolution de $11x + 2y = 0$. 11 et 2 premiers entre eux donc $S = \{(-2k, 11k)\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

la solution générale de (E) est $\{(-2k + 8\,,\,11k + 3),\ k \in \mathbb{Z}\}$. $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

2°) $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$

a) (a , -b) est solution de (E) car $11a + 2(-b) = (n + 60) - (n - 34) = 94$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

b) Reste de la division de n par 22. $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

$n = 11a - 60 = 11(-2k + 8) - 60 = -22k + 28 = 22(-k + 1) + 6$ Le reste est 6.

3°) a) Expressions de l'âge d'HOVONO

1ère manière $10 + \alpha + \beta$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

$2^{ème}$ manière $2004 - (1900 + 10\alpha + \beta) = 104 - 10\alpha - \beta$. 0,25 pt

b) L'âge d'HOVONO en 2004

on trouve $11\alpha + 2\beta = 94$ Le couple (α, β) est solution de l'équation (E) 0,25 pt

utiliser les encadrements de α et β,

on trouve $\alpha = 8$ et $\beta = 3$.(expliciter les calculs) 0,75 pt

HOVONO est donc né en 1983, il a donc 21 ans. 0,25 pt

Problème (11 points)

Partie A(7 points)

1°) **Justification de (O,A, B) repère du plan**

$a \neq 0$, alors O, A et B sont non alignés. 0,25 pt

2°) a) **M barycentre des points A et B**

$M \in (AB)$, il existe t réel tel que $(1-t)\overrightarrow{AM} + t\,\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ 0,25 pt

b) **Tout point de (AB) est invariant par f_a**

Conservation du barycentre par f_a ce qui conduit à $f_a(M) = M$. 0,5 pt

3°) a)**Justifications de $\varphi_a(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\varphi_a(\vec{j}) = (a+1)\vec{j}$**

On calcule $\varphi_a(\overrightarrow{OA})$ et $\varphi_a(\overrightarrow{OB})$ puis on conclue 0,5 pt

b) **Expression analytique de f_a**

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + (a+1)y - 2a \end{cases}$$ 0,5 pt

4°) a) **Coordonnées de $f_a \circ f_a(M)$** $= [x\,,\ (2a+4)x + (a+1)^2y - 4a - 2a^2]$ 0,5 pt

b) **$f_b \circ f_b = Id_{\mathscr{P}}$** équivaut à $b = -2$ 0,25 pt

c) **$\mathscr{D}$ ensemble des points invariants par f_b**

C'est la droite d'équation $x - y + 2 = 0$ 0,5 pt

d) **$\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et le milieu de [MM'] $\in \mathscr{D}$**

$\overrightarrow{MM'} = (2x - 2y + 4)\vec{j}$ 0,25 pt et

le milieu de [MM'] a pour coordonnées (x , x + 2). 0,25 pt

e) **Nature exacte de f_b**

Symétrie d'axe $\mathscr{D}$ et de direction $\vec{j}$ ou affinité de rapport -1 0,25 pt

5°) **f_a bijective pour $a \in \mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$**

l'image du repère (O,A,B) est le repère (C,A,B) puis conclure 0,5 pt

6°)a) **Equation de la droite (AB) : $2x + ay - 2a = 0$** 0,25 pt

b)**Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'} = (2x + ay - 2a)\vec{j}$**

M et M' sont distincts car $M \notin (AB)$, donc $(2x + ay - 2a) \neq 0$ alors

$\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\vec{j}$ 0,5 pt

c) **Coordonnées de H $(x\,;\ 2 - \frac{2}{a}x)$** point d'intersection de (AB) et (MM') 0,5 pt

d) **Détermination de k** tel que $\overrightarrow{HM'} = k\,\overrightarrow{HM}$ on trouve $k = a + 1$ 0,5 pt

Caractérisation de f_a

si $a = -1$ projection sur (AB) de direction $\vec{j}$ 0,25 pt

si $a \neq -1$ affinité d'axe (AB) de direction $\vec{j}$ et de rapport $a+1$ 0,5 pt

Partie B (4 points)

1°) a) Variations de v définie par $v(x) = x^2 + 1 - \ln x$ 0,25 pt

b) Signe de v sur $\mathbb{R}^{+*}$ 0,25 pt

2°) a)Variations et tableau de variation de u 0,25 pt

b) Asymptote oblique en $+\infty$. 0,25 pt

Etude des positions relatives de $\mathscr{C}$ et son asymptote oblique. 0,25 pt

c) Représentation. 0,5 pt

3°) a)Représentation de $\mathscr{C}' = f_{-2}(\mathscr{C})$ 0,75 pt

b) Equation de $\mathscr{C}'$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 0,5 pt

Expression de h la fonction de représentation $\mathscr{C}'$ 0,25 pt

c) Calcul de l'aire du domaine Δ_1 0,25 pt

Calcul de l'aire du domaine Δ_2 0,25 pt

Constat les aires sont égales 0,25 pt