BERENGER B. TC

BAC C R.C.I. session 96

EXERCICE I

L'unité choisie est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère deux points A et O tels que AO = 1,5.
Soit f la similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$. On pose B = f(A) et C = f(B).

1°) a) Construire les points B et C.

b) Démontrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle et que : BC = 2 BA.
En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

2°) Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
On désigne par D, E et F les points tels que B = R(D), E = R(C) et F = f(D).

a) Construire les points E, D puis F.

b) Démontrer que les points A, D, B et O sont cocycliques.
En déduire que B, F, C et O sont cocycliques.

c) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABD; $(\mathcal{C}')$ le cercle circonscrit au triangle BCF; $(\mathcal{C}'')$ le cercle circonscrit au triangle ACE.
Démontrer que les trois cercles ont le point O en commun.

EXERCICE II

Soit la suite U de premier terme u_o égal à 5 et définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2\,u_n + 4}{u_n + 5}$$

1°) a) Démontrer que pour tout entier n : $u_n > 0$

b) Démontrer que pour tout entier n : $u_n \neq 1$.

2°) Donner dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique de la fonction f définie sur] - 5 , + ∞ [par

$$f(x) = \frac{2\,x + 4}{x + 5} \quad \text{(unité : 2 cm)}.$$

Utiliser cette représentation graphique et la droite (D) d'équation y = x pour placer u_o, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.
D'après le graphique, quelle hypothèse peut-on faire sur le sens de variation de U et sa limite ?

3°) Soit V la suite réelle de terme général v_n tel que : $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$.
Démontrer que V est une suite géométrique et en donner le premier terme et la raison.
Démontrer que V est convergente et calculer sa limite.

4°) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME

Partie A:

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x\,e^{1-x}$.

1°) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) [unité : 3 cm].

2°) u est un réel strictement positif. Déterminer l'aire A(u) de la région du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = u.

3°) Calculer $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie B:

On considère les fonctions f_n définies dans IR par : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\,e^{1-x}$.

1°) Etudier les variations des fonctions f_2 et f_3 et construire leurs courbes représentatives respectives (C_2) et (C_3) dans le même repère que la courbe (C).

2°) Etudier, suivant la parité de n, les variations de la fonction f_n et donner ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
Démontrer que pour tout entier non nul n : $f'_n = f_{n-1} - f_n$.

Partie C:

On considère les fonctions J_n définies dans IR par : $J_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.

1°) Justifier l'existence de J_n.

2°) En utilisant la relation de la question B-2, calculer $J_n(x) - J_{n-1}(x)$ pour tout réel x.

3°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $J_n(x) = J1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x)$.

En déduire que : $J_n(x) = e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$.

4°) Dans cette question, on suppose que x est élément de [0, 1].

a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul : $0 \leq f_n(x) \leq f_n(1)$.

b) En déduire que pour tout x élément de [0, 1] , $J_n(x) \leq \frac{1}{n!}$

c) Calculer la limite de Jn(x) lorsque n tend vers + ∞.

d) Démontrer que pour tout x de [0, 1] ,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$$

Partie D.

1°) On suppose n pair. Etudier les variations de J_n sur IR ; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers + ∞ et - ∞.
Déterminer le nombre de solutions dans IR de l'équation : $J_n(x) = e$.

2°) On suppose n impair. Etudier les variations de J_n sur IR ; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers + ∞ et - ∞. Déterminer le nombre de solutions dans IR de l'équation : $J_n(x) = e$. Préciser le signe de chaque solution.

3°) Déterminer, suivant la parité de n, le nombre de solutions dans IR de l'équation :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$$

On ne calculera pas les solutions
Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	1	3/2	2
e^x	0,05	0,13	0,37	2,72	4,48	7,39