MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET TECHNIQUE,
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,
CHARGE DE LA CULTURE,
DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

DIRECTION DE L'ACADEMIE PROVINCIALE
DE L'OGOOUE MARITIME

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

REPUBLIQUE GABONAISE
Union-Travail-Justice

BACCALAUREAT BLANC PROVINCIAL

Session : avril 2013
Epreuve de Mathématiques
Série : D
Durée : 4 h
Coefficient : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

On dispose de deux trousses T_1 et T_2 contenant des stylos indiscernables au toucher.

T_1 contient : 7 stylos bleus et 3 stylos rouges.

T_2 contient : 2 stylos bleus et 1 stylo rouge.

On tire au hasard un stylo de T_1 et on le met dans T_2, puis on tire au hasard un stylo de T_2 et on le met dans T_1. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère les évènements suivants :
A : << après l'épreuve, les trousses se retrouvent dans leur configuration initiale >> ;
B : << après l'épreuve, la trousse T_2 contient un seul stylo bleu >>.

Vérifier que $p(A)=\dfrac{27}{40}$ et calculer $p(B)$.

2. Un joueur mise 200 F Cfa et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte le nombre de stylos bleus contenus dans T_2 :

- si T_2 contient un seul stylo bleu, le joueur reçoit 600 F Cfa ;
- si T_2 contient deux stylos bleus, le joueur ne reçoit rien ;
- si T_2 contient trois stylos bleus, le joueur reçoit 200 F Cfa.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Montrer que $E(X)=-75$ puis calculer la variance et l'écart –type de la variable X.

3. NGO-NONGA joue cinq fois de suite à ce jeu. Calculer, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il obtienne au plus quatre fois un gain strictement positif à l'issue des cinq épreuves.

EXERCICE 2 : (4,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points :

$$A(1;2;-1),\ B(-3;-2;3) \text{ et } C(0;-2;-3)$$

1.
   a. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est : $x+y-z+2=0$.
   Démontrer que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires.
3. On appelle G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$.
   a. Démontrer que G a pour coordonnées $(2;0;-5)$.
   b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) et de la droite (CG).
4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
5. Déterminer la distance du point H au plan (ABC).

EXERCICE 3 : (11,5 points)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=(x+1)e^{-x}-2x$.

1. Etudier les variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{3}\left[(x+1)e^{-x}+x\right]$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 10 cm.

1.
   a. Déterminer la fonction f' dérivée de f puis démontrer que : $f''(x)=\frac{1}{3}(x-1)e^{-x}$
   b. Etudier le signe de $f''(x)$ pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de f', puis en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$.

2.

a. Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.

b. Démontrer que : $\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) > \frac{1}{3}x$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Etudier la position relative de (C) et (Δ).

3. Tracer avec précision les tangentes à (C) aux points d'abscisses $x=0$ et $x=1$ (on ne demande pas d'équation), la droite (Δ), la droite (D) d'équation $y=x$ et (C).

4. Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet α pour unique solution sur $[0;+\infty[$.

Partie C :

1. On pose : $I=[0;1]$.

a. Démontrer que : $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.

b. Démontrer que : $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a. Sur le graphique précédent, construire les termes u_0, u_1 et u_2.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

c. Démonter que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

d. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

e. Déterminer un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

CORRIGE-TYPE SERIE D

1

Exercice 1

1) Vérifions que $p(A) = \frac{27}{40}$

$p(A) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{4}$

$= \frac{21+6}{40}$

$\boxed{p(A) = \frac{27}{40}}$

calculons $p(B)$

$p(B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{4}$

$= \frac{6}{40}$ d'où $\boxed{p(B) = \frac{3}{20}}$

2)

a) $\boxed{X(\Omega) = \{-200F ; 0F ; 400F\}}$

b) Loi de probabilité de X

$p(X=-200F) = p(A) = \frac{27}{40}$

$p(X = 0F) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{40}$

$p(X = 400F) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

$X = x_i$	$-200F$	$0F$	$400F$
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{20}$

c) Montrons que $E(X) = -75$

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \times p(X=x_i)$

$= \frac{-5400 + 2400}{40}$

$= \frac{-300}{40}$

$\boxed{E(X) = -75}$

Calcul de $V(X)$ et de $\sigma(X)$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 51.000 - 5625$

$\boxed{V(X) = 45375}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{45.375} = 5\sqrt{1815}}$

3) calculons la probabilité qu'il obtienne au plus 4 fois un gain strictement positif.

Soit $p_{k\leq 4}$ cette probabilité

$p_{k\leq 4} = 1 - p_5$

$= 1 - C_5^5 \times \left(\frac{3}{20}\right)^5 \times \left(\frac{17}{20}\right)^0$

$p_{k\leq 4} = 1 - \left(\frac{3}{20}\right)^5$

$\boxed{p_{k\leq 4} \simeq 0,999}$ par défaut

ou $\boxed{p_{k\leq 4} \simeq 1}$ par excès

Exercice 2

1) a) Montrons que les points A, B et C définissent un plan.

$\vec{AB}(-4; -4; 4)$, $\vec{AC}(-1; -4; -2)$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = D_1 \vec{i} + D_2 \vec{j} + D_3 \vec{k}$

avec $D_1 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 24$

$D_2 = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -12$

$D_3 = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 12$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} (24; -12; 12)$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ donc les points A, B et C définissent un plan.

b) Démontrons que $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 12\vec{n}$ donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est colinéaire à $\vec{n}$, or $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2) Soit $(P) : x + y - z + 2 = 0$

Démontrons que (P) et (ABC) sont perpendiculaires.

$\vec{n'}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (P).

$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 - 1 - 1 = 0$

donc $\vec{n} \perp \vec{n'}$ d'où les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires

3) G = bar

A	B	C
1	-1	2

a) Démontrons que $G(2; 0; -5)$

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} = \frac{2+2-4}{2} = 0$$

$$z_G = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c} = \frac{-1-3-6}{2} = -5$$

donc $\boxed{G(2; 0; -5)}$

b) Démontrons que (CG) est orthogonale à (P)

$\vec{CG}(2; 2; -2)$

$\vec{CG} = 2\vec{n'}$ donc $\vec{CG}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires d'où (CG) est orthogonale au plan (P).

c) Déterminons une représentation paramétrique de (CG)

(CG) passe par $C(0; -2; -3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{CG}(2; 2; -2)$ donc une représentation paramétrique de (CG) est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

d) Déterminons les coordonnées de H

$H \in (CG)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_H = 2t \\ y_H = -2 + 2t \\ z_H = -3 - 2t \end{cases}$$

$H \in (P)$ donc $x_H + y_H - z_H + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

$x_H = -1$; $y_H = -3$; $z_H = -2$

donc $\boxed{H(-1; -3; -2)}$

4) Démontrons que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12$ est une sphère dont on précisera les éléments caractéristiques

$M \in (S) \Leftrightarrow \|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12$

$\Leftrightarrow \|2\vec{MG} + \vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC}\| = 12$

or $\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$ donc

$M \in (S) \Leftrightarrow \|2\vec{MG}\| = 12$

$\Leftrightarrow MG = 6$

d'où (S) est la sphère de centre G et de rayon 6.

5) Calculons la distance de H au plan (ABC)

$$d(H, (ABC)) = \frac{|\vec{HA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$\vec{HA}(2; 5; 1)$, $\vec{n}(2, -1; 1)$

$\vec{HA} \cdot \vec{n} = 4 - 5 + 1 = 0$

donc $\boxed{d(H, (ABC)) = 0}$

EX03

(A)

1°) $g(x) = (x+1)e^{-x} - 2x$; $D_g = [0;+\infty[$.

g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$g'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} - 2$

$\boxed{g'(x) = -xe^{-x} - 2} = -(xe^{-x}+2) < 0$

$\Rightarrow$ g est st ↘ sur $[0;+\infty[$.

2°) g est dérivable et st ↘ sur $[0;1]$

Alors g réalise une bijection de $[0;1]$ vers $J = g([0;1]) = [g(1) ; g(0)]$.

$g(1) = 2e^{-1} - 2 \simeq -1,26 < 0$

$g(0) = 1$

Comme $[2e^{-1}-2 ; 1]$

alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;1]$.

(B)

$f(x) = \frac{1}{3}\left[(x+1)e^{-x} + x\right]$; $D_f = [0;+\infty[$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{3}\left[e^{-x} - (x+1)e^{-x} + 1\right]$

$= \frac{1}{3}(1-x-1)e^{-x} + 1/3$

$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{3}xe^{-x} + \frac{1}{3}}$

$f''(x) = -\frac{1}{3}\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)$

$f''(x) = -\frac{1}{3}(1-x)e^{-x}$

$\boxed{f''(x) = \frac{1}{3}(x-1)e^{-x}}$.

(4)

5°) $f''(x)$ a le même signe que $x-1$ car $\frac{1}{3}e^{-x} > 0$ sur $[0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Dans $[0;1[$; $f''(x) < 0$

Dans $]1;+\infty[$; $f''(x) > 0$.

si $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{1}{3e}+\frac{1}{3} \simeq 0,21 > 0$	↗	$\frac{1}{3}$

$f'(x) > 0$ car $-\frac{1}{3e} + \frac{1}{3}$ est le minimum de f'

2°) $f'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$

$\Rightarrow$ f est st ↗ sur $[0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

3°) $f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(x+1)e^{-x} > 0$

Donc $f(x) > \frac{1}{3}x$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$

on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c°)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}(x+1)e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\right)$$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$

Par somme on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\right)=0$

Par produit on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\right)=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right]=0$

D'où la droite (Δ) : $y=\frac{1}{3}x$ est une A.O à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Posit° de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)

signe de $\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right]$

on a $f(x)-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}(x+1)e^{-x}>0$ sur $[0;+\infty[$

~~Alors $f(x)-\frac{1}{3}x$ a le même signe que~~ (C)

~~$x+1$ car $\frac{1}{3}e^{-x}>0$~~

x	0	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x)-\frac{1}{3}x$	$-$	0	$+$

~~Dans $[0;1[$; $f(x)-\frac{1}{3}x<0$~~

~~$\Rightarrow (\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ)~~

~~Dans $]1;+\infty[$; $(\mathcal{C})$ est au dessus de (Δ)~~

~~si $x=1 \Rightarrow (\mathcal{C})$ et (Δ) coïncident~~

~~$A(1; f(1)) \Leftrightarrow A(1; \frac{1}{3})$~~

Alors $(\mathcal{C})$ est au dessus de (Δ)

4°) Mq $f(x)=x$ admet α pour unique solut° sur $[0;+\infty[$.

soit $h(x)=f(x)-x$.

h est dérivable sur $[0;+\infty[$. on a $f'(x)<\frac{1}{3}<1$.

Donc $h'(x)=f'(x)-1<0$

$\Rightarrow h$ est stt $\searrow$ sur $[0;+\infty[$

Alors h réalise une biject de $[0;+\infty[$ vers $h([0;+\infty[)$

$=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h(x);h(0)\right]=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$

comme $0\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$ alors l'équat° $h(x)=0$ admet α pour solut° unique sur $[0;+\infty[$.

$\Rightarrow f(x)=x$ admet α pour unique solut° sur $[0;+\infty[$.

$I=[0,1]$.

a°) Mq $\forall x\in I,\ f(x)\in I$.

$x\in I \Leftrightarrow 0\le x\le 1$

$f(0)\le f(x)\le f(1)$ (car $f\nearrow$)

$0\le\frac{1}{3}\le f(x)\le\frac{2}{3e}+\frac{1}{3}\le 1$

Donc $f(x)\in[0,1]$

$\Leftrightarrow f(x)\in I$

(C) (à suivre)

b°) Dque $\forall x \in I$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

on a $f'(x) = -\frac{1}{3} x e^{-x}$.

$x \in I \iff 0 \leq x \leq 1$.

$\iff f'(1) \leq f'(x) \leq f'(0)$

$\iff -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{3e} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{3}$

Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

2°) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

a°) Voir figure.

b°) Dque $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in I$.

on a $u_0 = 0 \in [0;1]$.

on suppose $u_k \in I$, Dque $u_{k+1} \in I$.

on a $u_k \in I \iff 0 \leq u_k \leq 1$

$\iff f(0) \leq f(u_k) \leq f(1)$.

$0 \leq \frac{1}{3} \leq u_{k+1} \leq \frac{2}{3e} + \frac{1}{3} \leq 1$

Donc $u_{k+1} \in I$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in I$.

c°) Dque $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

on a $x \in I$. $u_n \in I$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

(b) D'après le théo des acc finis

on a $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

$\iff |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

~~on a~~ $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$?

$|u_0 - \alpha| \leq 1$?

on a $u_0 = 0$

$0 \leq \alpha \leq 1$

$-1 \leq -\alpha \leq 0 \leq 1$

$-1 \leq u_0 - \alpha \leq 1$

$\iff |u_0 - \alpha| \leq 1$.

Donc $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$

on suppose $|u_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Dque $|u_{k+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$

on a $|u_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_k - \alpha|$.

or $|u_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$\iff \frac{1}{3}|u_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$

$\iff |u_{k+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

d°) on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

7

e°)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-3}$$

$$n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq -3 \ln 10$$

$$n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 3}$$

$$n \geq 6,25$$

Donc on peut prendre

$p = 7$.