MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET TECHNIQUE,
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,
CHARGE DE LA CULTURE,
DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

DIRECTION DE L'ACADEMIE PROVINCIALE
DE L'OGOOUE MARITIME

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

REPUBLIQUE GABONAISE
Union-Travail-Justice

BACCALAUREAT BLANC PROVINCIAL

Session : avril 2013
Epreuve de Mathématiques
Séries : C et E
Durée : 4 h
Coefficient : 5

EXERCICE 1 : (4 points)

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B (on prendra $AB = 6\ cm$ pour la figure).

1. Déterminer et représenter l'ensemble (Σ) des points M du plan tels que : $\dfrac{MA}{MB} = 3$.
2. Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $Mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[\pi]$.
3.
   a. Placer le point C image de B par la rotation **r** de centre A et d'angle orienté de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.

   b. Placer le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
4. On désigne par **s** la similitude directe du plan qui transforme A en B et C en D. On note Ω le centre de **s**.

   a. Déterminer le rapport et l'angle de **s**.

   b. Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)$.

   c. En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.

   d. Démontrer que les points Ω, A, C, et D sont cocycliques.

EXERCICE 2 : (5 points)

Soit n un nombre entier naturel $(n \geq 1)$. Une urne contient des boules numérotées de 1 à $2n$. On y trouve :

- 1 boule le numéro 1 ;
- 2 boules portant le numéro 2 ;
- 2^2 boules portant le numéro 3 ;
- 2^3 boules portant le numéro 4 ;
- etc… et enfin ;
- 2^{2n-1} boules portant le numéro $2n$.

Partie 1 :

On appelle N le nombre de boules contenues dans l'urne.

1. Montrer que $N = 4^n - 1$ et que N est un multiple de 3.
2. On désigne par I le nombre de boules portant un numéro impair, et par P le nombre de boules portant un numéro pair.
   a. Montrer que : $I = \dfrac{4^n - 1}{3}$.
   b. Exprimer alors I en fonction de N et montrer que : $P = 2I = \dfrac{2N}{3}$.

Partie 2 :

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on désigne par X le nombre de boules tirées portant un numéro pair.

1. Donner en fonction de N, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer son espérance mathématique et vérifier qu'elle ne dépend pas de N.

Partie 3 :

On suppose maintenant que : $100 \leq I \leq 1000$.

1. Quel est le plus grand numéro porté par les boules ?
2. On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité pour que cette boule porte un numéro supérieur ou égal à 8 ?

PROBLEME : (11 points)

Partie A :

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $K = [0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Soit a un élément non nul fixé dans K. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a f_n(x)dx$.

1. Justifier l'existence de $I_n(a)$. Calculer $I_0(a)$.
2.
   a. Montrer que : $\forall x \in K$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$.
   c. Puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(a) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$.
3. Dans cette question, on pose : $a = 1$.

   On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_n = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)dx$.

   On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé d'unité graphique $3\ cm$.

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Puis donner une interprétation géométrique de u_n.

0,5 **b.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0;1]$, $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{n!}x^n$.

0,5 **c.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le \frac{1}{(n+1)!}$. Déterminer la limite de u_n en $+\infty$. 0,5 + 0,25

0,25 **d.** En déduire que : $e = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$, (C) sa courbe représentative. 2,5

1.

0,25 **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

0,25 **b.** Montrer que : $\forall x > 0$, $f(x) = x + \ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

0,25 **c.** En déduire que la courbe (C) admet pour asymptote la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

0,5 **d.** Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2.

0,5 **a.** Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

0,75 **b.** Construire (C) et (Δ) dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité $3\ cm$.

Partie C :

Pout tout x élément de $[0;+\infty[$, on pose : $F(x) = \int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1.

a. Montrer que F est bien définie et positive sur $[0;+\infty[$. 0,25 + 0,25

b. Soit λ un réel strictement positif, en utilisant la question **1.** de la **Partie B**, interpréter graphiquement $F(\lambda)$. 0,25

2.

a. Justifier que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$. 0,25 + 0,25

b. Etudier le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$. 0,25 + 0,25

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Montrer que : $\forall t \in [1;1+a]$, on a $\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{t} \le 1$. 0,25

b. En appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction $\ln$, établir que :

$\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$. 0,25 + 0,5

4. Soit x un réel strictement positif.

a. Déduire de la question **3** que : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \le F(x) \le \int_0^x e^{-2t}dt$. 0,5

b. Puis que : $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) \le F(x) \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$. 0,5

5. On admet que la limite de F en $+\infty$ existe et est un nombre réel noté k.

   Etablir que : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq k \leq \frac{1}{2}$.

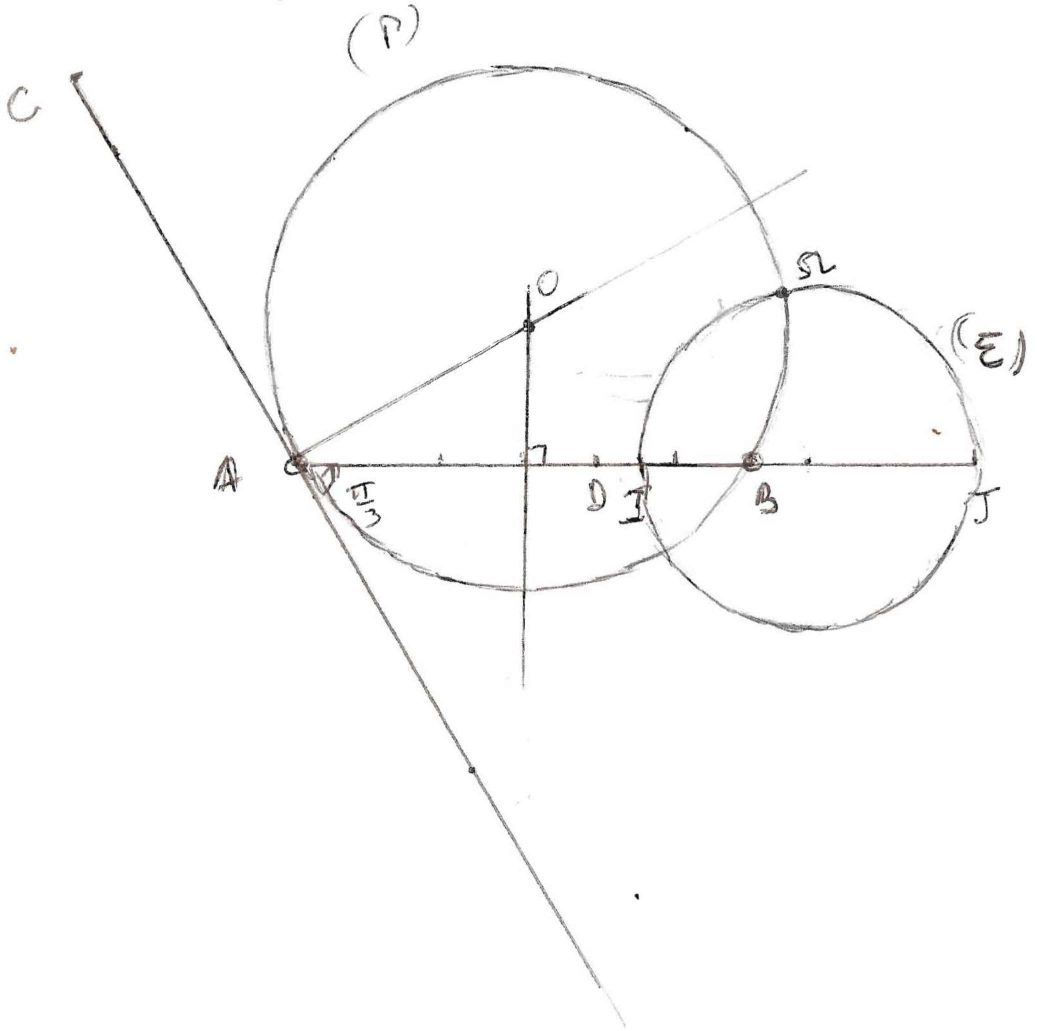
6. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$.

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq \frac{\left(1-e^{-2}\right)e^{-2n}}{2}$.

   b. Déterminer la limite de v_n en $+\infty$.

Correction BAC BLANC PROVINCIAL
Avril 2013 TC.

Exercice 1



1°/ Déterminons et représentons (Σ) :

$$\frac{MA}{MB} = 3 \iff MA^2 - 9MB^2 = 0$$

$$\iff (\vec{MA} - 3\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + 3\vec{MB}) = 0$$

Soit $I = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$ et $J = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & -3 \\ \hline \end{array}$

On a : $-2\vec{MJ} \cdot 4\vec{MI} = 0$

soit $\vec{MJ} \cdot \vec{MI} = 0$

(Σ) est le cercle de diamètre $[IJ]$.

(Voir la représentation sur la figure).

2/ Déterminons et représentons l'ensemble (Γ)

$$\text{Mes}(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$$

Soit O un point tel que $\text{Mes}(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

(Γ) est le cercle de centre O et de rayon OA privé des points A et B.

(Voir représentation).

3°/ a/ Plaçons C (Voir figure) $\text{Mes}(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

et $AB = AC = 6\,cm$

b/ Plaçons D (Voir figure) $(AD = 4\,cm)$

$D \in [AB]$.

4) a) Déterminons le rapport et l'angle de S.

$S(A) = B$ et $S(C) = D$

donc le rapport $k = \frac{BD}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

et l'angle $\theta = \text{mes}(\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}})$

$= \text{mes}(\widehat{\vec{AC}, -\vec{AB}})$

$= +\pi + \text{mes}(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}})$

$= +\pi + \frac{2\pi}{3} = +\frac{\pi}{3} [2\pi]$

b) * Exprimons ΩB en fonction de ΩA

$S(\Omega) = \Omega$ et $S(A) = B$

alors $\frac{\Omega B}{\Omega A} = \frac{1}{3}$ donc $\Omega B = \frac{1}{3}\Omega A$

et $\Omega \in (\Sigma)$

* Donnons une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}})$

$\text{mes}(\widehat{\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}}) = \theta [2\pi]$

$= +\frac{\pi}{3} [2\pi]$

c) Position de Ω

Une mesure de $(\widehat{\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}})$ est donc $\frac{\pi}{3}$.

Donc $\Omega \in (\Gamma)$ et à (Σ). Plaçons Ω (Voir la figure

Ω est le point d'intersection de (Γ) et (Σ) tel

que $\text{mes}(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

4) Démontrons que Ω, A, C, D sont cocycliques

$\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

$\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) = \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

or $\frac{\pi}{3} \neq 0\,[\pi]$ et $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \pi$

alors $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}})\,[\pi]$

donc les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

EXERCICE 2

Partie 1

1/ * Montrons que $N = 4^n - 1$

$N = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2n-1}$

N est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

donc $N = \frac{2^{2n} - 1}{2 - 1} = 2^{2n} - 1 = (2^2)^n - 1 = 4^n - 1$.

$N = 4^n - 1$.

* Montrons que N est un multiple de 3.

$4 \equiv 1 [3]$

$4^n \equiv 1^n [3]$ et $1^n \equiv 1 [3]$

donc $4^n \equiv 1 [3]$

et $4^n - 1 \equiv 0 [3]$

$N \equiv 0 [3]$

N est donc un multiple de 3.

On peut le démontrer par récurrence aussi.

2) a) Montrons que : $I = \frac{4^n - 1}{3}$

$I = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2n-2}$

$= 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1}$

I est la somme des termes d'une suite

géométrique de raison 4 et de premier terme 1

donc $I = \dfrac{4^n - 1}{4-1} = \dfrac{4^n - 1}{3}$

d'où le résultat.

b/ * Exprimons I en fonction de N.

$I = \dfrac{N}{3}$ car $N = 4^n - 1$.

* Montrons que $P = 2I = \dfrac{2N}{3}$

$P = N - I$ or $N = 3I$ car $I = \dfrac{N}{3}$

donc $P = 3I - I = 2I = 2 \times \dfrac{N}{3} = \dfrac{2N}{3}$.

d'où $P = 2I = \dfrac{2N}{3}$.

Partie 2

1) Donnons la loi de probabilité de X

Valeurs possibles de $X = \{0, 1, 2\}$.

$\text{Card}(X=0) = C_I^2 = C_{\frac{N}{3}}^2 = \dfrac{\frac{N}{3}\left(\frac{N}{3} - 1\right)}{2} = \dfrac{N(N-3)}{18}$

$\text{Card}\,\Omega = C_N^2 = \dfrac{N(N-1)}{2}$

$p(X=0) = \dfrac{(N-3)}{9(N-1)} = \dfrac{N-3}{9(N-1)}$

$\text{Card}(X=1) = P \times I = \dfrac{2N}{3} \times \dfrac{N}{3} = \dfrac{2N^2}{9}$

Exercice 2 (suite)

$$p(X=1) = \frac{4N}{9(N-1)}$$

$$\mathrm{Card}(X=2) = C_p^2 = C_{\frac{2N}{3}}^2 = \frac{\frac{2N}{3}\left(\frac{2N}{3}-1\right)}{2} =$$

$$= \frac{N(2N-3)}{9}$$

$$p(X=2) = \frac{2(2N-3)}{9(N-1)}$$

La loi de Probabilité est :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{N-3}{9(N-1)}$	$\frac{4N}{9(N-1)}$	$\frac{4N-6}{9(N-1)}$

2/ * Calculons l'espérance mathématique

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} P_i x_i$$

$$E(X) = \frac{4N + 8N - 12}{9(N-1)} = \frac{12(N-1)}{9(N-1)}$$

$$= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$E(X) = \frac{4}{3}$ donc $E(X)$ ne dépend pas de N.

Partie 3

$100 \leq \Sigma \leq 1000$

1°/ Déterminons le plus grand numéro portée par les boules.

$300 \leq N \leq 3000$

$301 \leq 4^n \leq 3001$

$\ln(301) \leq n\ln 4 \leq \ln 3001$ (Car ln est croissante sur $]0;+\infty[$.

$$\frac{\ln(301)}{\ln 4} \leq n \leq \frac{\ln(3001)}{\ln 4} \quad (\ln 4 > 0.)$$

$4,11 \leq n \leq 5,78$ d'où $n = 5$

Car $n \in \mathbb{N}^*$

Le plus grand numéro portée par les boules est $\boxed{2 \times 5 = 10}$.

2°/ Calculons la probabilité

2^9 boules portent le numéro 10

2^8 boules portent le numéro 9

2^7 boules portent le numéro 8.

Soit $2^7 + 2^8 + 2^9 = 896$ boules portent un numéro supérieur ou égal à 8.

$N = 4^5 - 1 = 1023$ $\boxed{p = \frac{896}{1023}}$

PROBLEME

Partie A

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx$$

1/ * Justifions l'existence de $I_n(a)$.

les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ et $x \mapsto -x$; $x \mapsto e^x$

sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $a \in]0, +\infty[$ d'où l'existence de $I_n(a)$.

* Calculons $I_0(a)$

$$I_0(a) = \int_0^a e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = -e^{-a} + 1$$

$$\boxed{I_0(a) = 1 - e^{-a}}$$

2/ a/ Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

$x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}}{n!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} - \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

$$= f_{n-1}(x) - f_n(x)$$

$$f_n(0) = \frac{0^n}{n!} e^0 = 0.$$

D'où le résultat.

b/ Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$

les fonctions $x \mapsto f_n'(x)$, $x \mapsto f_n(x)$ sont continues sur $[0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

En intégrant sur $[0,a]$ l'égalité du 2a/ on a :

$$\int_0^a f_n'(x)\,dx = \int_0^a [f_{n-1}(x) - f_n(x)]\,dx$$

$$[f_n(x)]_0^a = \int_0^a f_{n-1}(x)\,dx - \int_0^a f_n(x)\,dx$$ d'après la linéarité de l'intégrale.

donc $\frac{a^n}{n!}e^{-a} = I_{n-1}(a) - I_n(a)$

alors $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$.

c/ Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$

$\forall n \geq 1$, $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$

Par itération :

$$I_1(a) - I_0(a) = -\frac{a}{1!}e^{-a}$$
$$I_2(a) - I_1(a) = -\frac{a^2}{2!}e^{-a}$$
$$\vdots$$
$$I_{n-1}(a) - I_{n-2}(a) = -\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}e^{-a}$$
$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

En additionnant membre à membre ces égalités et après simplification on a :

$$I_n(a) - I_0(a) = -\left(\frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a^n}{n!}\right)e^{-a}$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$$

$$I_n(a) = I_0(a) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$$

$$= 1 - e^{-a} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$$

$$= 1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$$

or $1 = \frac{a^0}{0!}e^{-a}$ $(a>0)$.

donc $\boxed{I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}}$

3°/ On pose $a = 1$

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

a/ * Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, et $x \in [0, +\infty[$, $\frac{x^n}{n!} \geq 0$ et $e^{-x} > 0$

donc $f_n(x) \geq 0$ or $0 < 1$

donc ~~[illegible]~~ $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq 0$ et $u_n \geq 0$

* Interprétation géométrique de u_n.

u_n est l'aire en unité d'aire, du domaine plan délimité par l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x=1$, l'axe des abscisses et la courbe $(\mathcal{C}_n)$ de f_n.

b/ Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, et $\forall x \in [0,1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$$

On $0 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq -x \leq 0$

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1.$$

or $e^{-x} > 0$

donc $0 \leq e^{-x} \leq 1$

or $x \geq 0$, donc $x^n \geq 0$ et $n! > 0$

En multipliant la double inégalités précédentes par $\frac{x^n}{n!}$ on a : $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

c/ Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$

la fonction $x \mapsto f_n(x)$ et $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ sont continue sur $[0,1]$ donc en intégrant le résultat précédent sur $[0,1]$ on a :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$$

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\,dx$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

Donc $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{(n+1)n!}$

et $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$ (car $(n+1)n! = (n+1)!$

$(n+1)! \geq n+1 \Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{n+1}$

et $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

or $\lim\limits_{n \to 0} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

d/ Déduisons que $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \right)$

$u_n = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \right) e^{-1}$

$e > 0$ et donc

$e u_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

et $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e - e u_n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} (e - e u_n) = e$

d'où $\boxed{e = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}}$

Partie B

1 / a) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\}$ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrons que : $\forall x > 0$, $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$

$$f(x) = \ln\left[e^x (1 + e^{-2x})\right]$$
$$= \ln e^x + \ln(1 + e^{-2x})$$
$$= x + \ln(1 + e^{-2x}).$$

donc $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$

c) Déduisons que $\Delta : y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \text{et } \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1 \end{array}\right\}$ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = \ln 1$
$= 0$

d'où la droite Δ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

d/ Etudions la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ)

$f(x) - x = \ln(1+e^{-2x})$

$\forall x \in [0,+\infty[$, $e^{-2x} > 0$

$1+e^{-2x} > 1$

$\ln(1+e^{-2x}) > \ln 1$ (car $\ln$ est est croissante)

$f(x) - x > 0$ et la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite Δ.

2) a/ Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variations.

$x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont derivables sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $e^{x}+e^{-x} > 0$ donc $x \mapsto f(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

$\forall x \in [0,+\infty[$, $x \geq -x$

$e^{x} \geq e^{-x}$ (car exp est croissante)

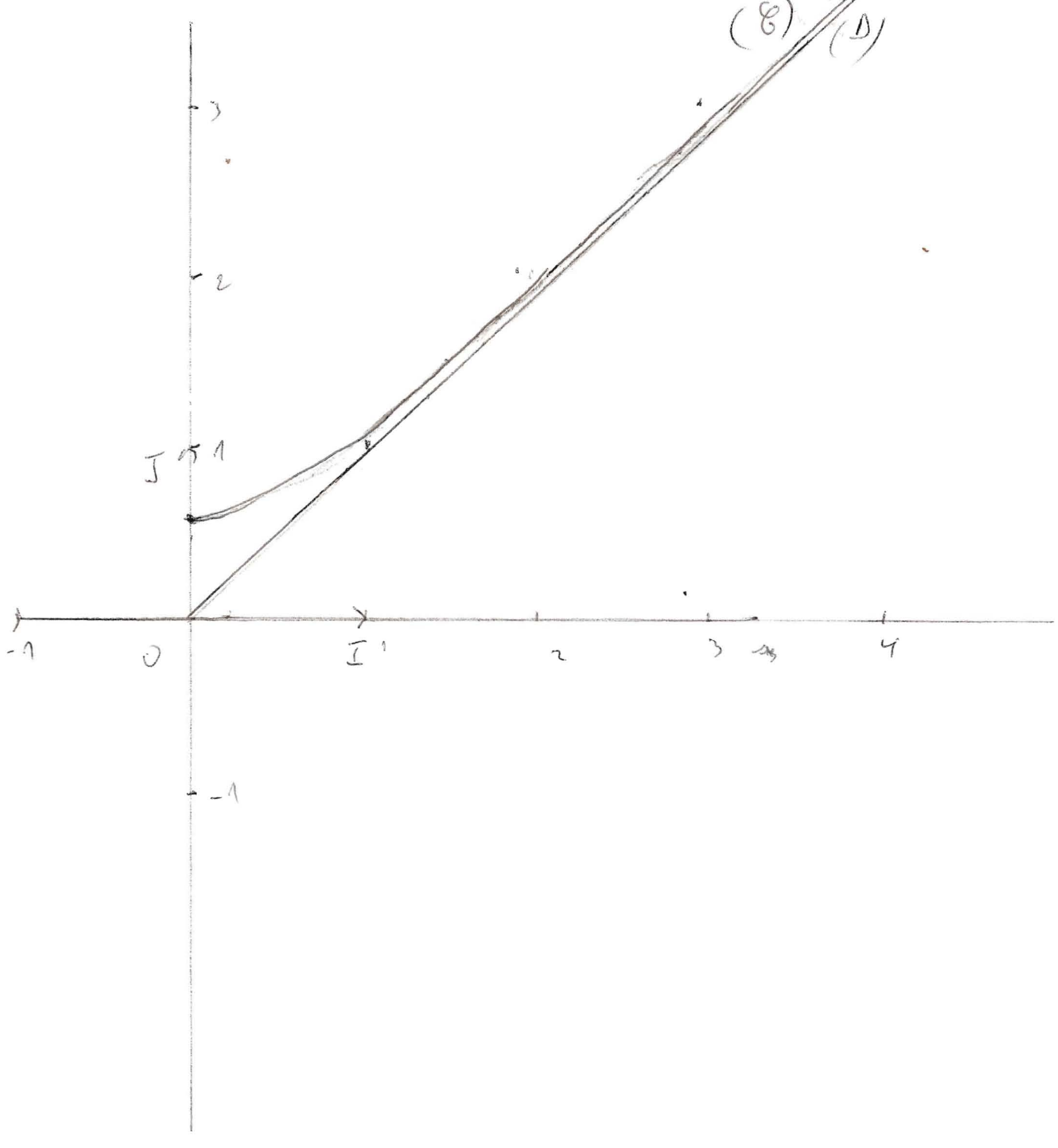
$e^{x} - e^{-x} \geq 0$

et $f'(x) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$	$+\infty$

b/ Constructions de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ (Voir la figure)



Partie C

$\forall x \in [0;+\infty[$, $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$

1°/ a/ Montrons que F est bien définie et positive sur $[0;+\infty[$.

* $t \mapsto -2t$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc $t \mapsto e^{-2t}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et $1+e^{-2t} > 0$

Alors $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$ est continue sur $[0;+\infty[$ et $x \in [0;+\infty[$.

d'où F est bien définie sur $[0;+\infty[$.

* De plus, pour $t \in [0;+\infty[$, $e^{-2t} > 0$

$1+e^{-2t} > 1$

$\ln(1+e^{-2t}) > 0$ (car ln est croissante)

et $x \geq 0$, alors d'après la positivité de l'intégrale, $F(x) \geq 0$.

b/ $\lambda > 0$

Interprétons graphiquement $F(\lambda)$.

$F(\lambda)$ est l'aire en unité d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=0$, $x=\lambda$, la courbe (C_G) et la droite (Δ).

2°/ a/ Justifions que F est dérivable sur $[0;+\infty[$

et calculons $F'(x)$

F est la primitive de la fonction $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$ sur $[0;+\infty[$, qui s'annule en 0. Donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $F'(x) = \ln(1+e^{-2x})$.

b/ Etudions le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $1+e^{-2x} > 1$ et $F'(x) \geq 0$

donc F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

3/ $a > 0$

a) Montrons que : $\forall t\ [1;1+a]$, on a

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$

$t \in [1;1+a] \iff 1 \leq t \leq 1+a$

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$.

b/ Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\ln$.

$\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\ln' t = \frac{1}{t}$

De plus pour $t \in [1;1+a]$, $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

En appliquant la propriété de l'inégalité des accroissements finis à $\ln$ sur $[1;1+a]$, on a :

$$\frac{1}{1+a}(a+1-1) \leq \ln(1+a) - \ln 1 \leq 1(a+1-1)$$

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$$

4°) $x > 0$

a) Déduisons que $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$

Pour $t \geq 0$, $e^{-2t} > 0$.

En remplaçant ~~a~~ par e^{-2t} dans l'inégalité démontrée précédemment on a :

$$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}.$$

Les fonctions $t \longmapsto \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$, $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$

$t \mapsto e^{-2t}$ sont continues sur $[0;+\infty[$.

En intégrant la double inégalités précédentes sur $[0;x]$ on a :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$$

b/ Déduisons que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_0^x e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}$$ d'où

$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

5°) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = k.$

Etablissons que : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq l_k \leq \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} (1+e^{-2n}) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+e^{-2n}) = 0$

et $\lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$

$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2n}) \leq F(n) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$

Par passage à la limite en $+\infty$, on a :

$\frac{1}{2}\ln 2 \leq l_k \leq \frac{1}{2}$.

b/ $v_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt$

a/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{(1-e^{-2})e^{-2n}}{2}$

$\forall t \in [0;+\infty[$, $\ln(1+e^{-2t}) \geq 0$ et $n \leq n+1$

donc $v_n \geq 0$

D'après 3b Partie C, pour $a>0$, $\ln(1+a) \leq a$

or $e^{-2t} > 0$ donc $\ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$

$\int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt \leq \int_n^{n+1} e^{-2t}\,dt$

$\int_n^{n+1} e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_n^{n+1} = -\frac{1}{2}e^{-2n-2} + \frac{1}{2}e^{-2n}$

$= e^{-2n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}\right)$

$= \frac{(1-e^{-2})e^{-2n}}{2}$.

donc $\boxed{0 \leq v_n \leq \frac{(1-e^{-2})e^{-2n}}{2}}$

b/ Déterminons la limite de v_n en $+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, D'après le Théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.