MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET TECHNIQUE,
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,
CHARGE DE LA CULTURE,
DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

DIRECTION DE L'ACADEMIE PROVINCIALE
DE L'OGOOUE MARITIME

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

REPUBLIQUE GABONAISE
Union-Travail-Justice

BACCALAUREAT BLANC PROVINCIAL

Session : avril 2013
Epreuve de Mathématiques
Séries : A_1 et B
Durée : 3 h
Coefficients : 4 et 3

EXERCICE 1 : (4 points)

De 2004 à 2011, le nombre y (en dizaines de milliers) de passagers transportés par la compagnie aérienne FREELY est donné par le tableau suivant où x désigne le rang de l'année correspondante.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Quantité y_i de passagers	8	9,2	9,6	11	11,2	12	13,5	15

1.
   a. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double $(x; y)$.
   b. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer G.
2.
   a. Vous semble-t-il approprié de faire un ajustement linéaire de ce nuage ? Justifier la réponse.
   b. Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
3. Combien de passagers cette compagnie peut-elle s'attendre à transporter cette année ?

EXERCICE 2 : (5 points)

Au 1er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100000 habitants. Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente de 5% du fait des naissances et des décès ;
- 4000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Partie I : Etude théorique

Pour tout entier naturel n, on note U_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier $2005+n$.
Ainsi $U_0 = 100000$.

1. Calculer U_1 et U_2.

2. Justifier que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = (1,05)U_n + 4000$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose : $V_n = U_n + 80000$.
   a. Calculer V_0.
   b. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c. Exprimer V_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier n : $U_n = 180000(1,05)^n - 80000$.

Partie II :
Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020 en utilisant le modèle théorique étudié à la **Partie** I.
1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
2. A partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200000 habitants ?

PROBLEME : (11 points)

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan ramené à un repère orthonormé (O,I,J) d'unité graphique $4cm$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire
On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = e^x(x-2) - 1$.
1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Etude des variations de g.
   a. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
   b. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations complet sur $[0;+\infty[$.
3.
   a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$.
   Justifier que : $\alpha \in [1;3]$.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$.

Partie B : Etude de la fonction f
1.
   a. Démontrer que pour tout x de $[0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$.
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
2.
   a. f' est la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que pour tout x de $[0;+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x + x)^2}$ où g est la fonction étudiée dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

3. Construire la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y=1$ dans le repère défini plus haut.

<u>**Partie C :**</u> Calcul d'aire

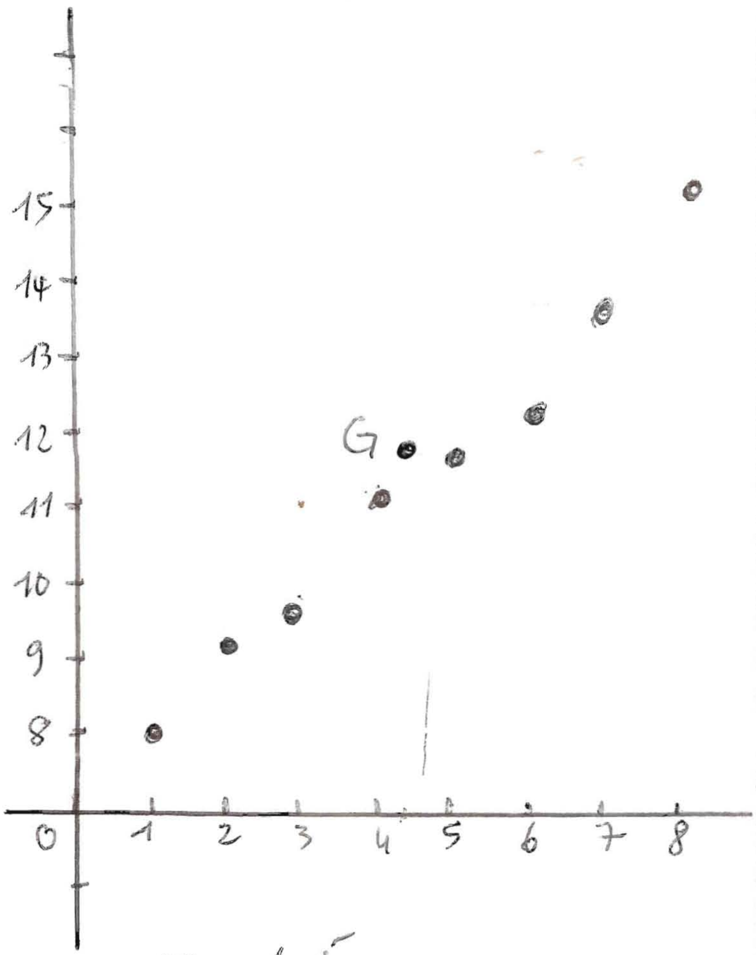
On note Σ l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe (C), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

1. Hachurer le domaine Σ sur le graphique.
2. Déterminer une primitive F de f sur $[0;+\infty[$.
3. En déduire la valeur exacte de Σ, puis une valeur approchée arrondie au cm^2.

Corrigé type BAC, PDG, Maths Série A1 2013

EXERCICE 1

1° a) Nuage de points.



b) $\bar{x} = 4,5$

$\bar{y} = 11,1875$

donc $G(4,5\ ;\ 11,1875)$

2° a) Il semble approprié de faire un ajustement linéaire de ce nuage car les points du nuage semble alignés et le nuage a une forme allongée.

b) $\bar{x} = 4,5$ $\quad V(x) = 5,25$

$\bar{y} = 11,1875$ $\quad cov(x,y) = 4,86875$

$a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)} \simeq 0,927$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \simeq 7,01$

donc une équation de la droite (D) de regression de y en x par la méthode des moindres carrés est :

$y = 0,927x + 7,01$

3° 2013 correspond au rang $x = 10$

$y = 0,927 \times 10 + 7,01$

$y \simeq 16,28$

EXERCICE 2

②

Partie I

$u_0 = 100.000$

1° calculons u_1 et u_2

$u_1 = u_0 + \frac{5 u_0}{100} + 4000$

$\boxed{u_1 = 109.000 \text{ Habit}}$

$u_2 = u_1 + \frac{5}{100} u_1 + 4000$

$\boxed{u_2 = 118450 \text{ Habit.}}$

2° justifions que

$u_{n+1} = 1,05\, u_n + 4000$

$u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} u_n + 4000$

$u_{n+1} = u_n + 0,05\, u_n + 4000$

donc

$\boxed{u_{n+1} = (1,05)\, u_n + 4000}$

3° $V_n = u_n + 80.000$

a) $V_0 = u_0 + 80.000$

$V_0 = 100000 + 80.000$

$V_0 = 180.000$ Habit

b) $V_{n+1} = u_{n+1} + 80.000$

$V_{n+1} = 1,05\, u_n + 4000 + 80000$

$V_{n+1} = 1,05 u_n + 84.000$

$V_{n+1} = 1,05 (u_n + 80000)$

$V_{n+1} = 1,05\, V_n$ donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $V_0 = 180.000$

c) $V_n = V_0 q^n = 180.000 (1,05)^n$

$u_n = V_n - 80.000$ donc

$\boxed{u_n = 180.000 (1,05)^n - 80.000}$

Partie II

1° En 2020 le nombre d'habit de cette ville sera u_{15}

$u_{15} = 180.000 (1,05)^{15} - 80.000$

$\boxed{u_{15} = 294207 \text{ Hab.}}$

2° $u_n \geq 200.000 \Leftrightarrow 18 (1,05)^n - 8 \geq 20$

$\Leftrightarrow 18 (1,05)^n \geq 28 \Leftrightarrow 1,05^n \geq \frac{28}{18}$

$\Leftrightarrow n \ln 1,05 \geq \ln \frac{14}{9}$

$n \geq \frac{\ln \frac{14}{19}}{\ln 1,05} \Rightarrow n \geq 9,05$

on prend $n = 10$ et $2005 + 10 = 2015$ donc c'est à partir de 2015 que $u_n \geq 200.000$

Problème 3

Partie A 3

$g(x) = e^x(x-2) - 1$

$x \in [0 ; +\infty[$.

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x-2 = +\infty$

2° a) g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $g'(x) = (x-1)e^x$

b) $e^x > 0$ et $g'(x)$ est de signe de $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

sur $[0 ; 1]$ $g' \leq 0$ et g est décroissante sur $[0 ; 1]$.

sur $[1 ; +\infty[$ $g' \geq 0$ et g est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	-3	$\searrow$	$-1-e$	$\nearrow$	$+\infty$

3° a) • sur $[0 ; 1]$ g est dérivable et strictement décroissante et $g([0 ; 1]) = [-1-e ; -3]$ or $0 \notin [-1-e ; -3]$ donc $g \neq 0$ sur $[0 ; 1]$ de plus $g < 0$ sur $[0 ; 1]$.

• sur $[1 ; +\infty[$ g est dérivable et strictement décroissante et $g([1 ; +\infty[) = [-1-e ; +\infty[$, donc g réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur $[-1-e ; +\infty[$, or $0 \in [-1-e ; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[1 ; +\infty[$.

En conclusion, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans $[0;+\infty[$.

De plus

$g(1) = -1-e < 0$

$g(3) = e-1 > 0$

$g(1) \times g(3) < 0$ ou encore

$g(1) < 0 < g(3)$ ou encore

$g(1)$ et $g(3)$ sont de signes contraires, ainsi

$$\boxed{1 < \alpha < 3}$$

b) Donnons un encadrement de α à 10^{-1} près.

$g(2,1) \simeq -0,18 < 0$

$g(2,2) \simeq 1,8 > 0$

donc $\boxed{2,1 < \alpha < 2,2}$

4) d'après 3a)

sur $[0;1]$ $g < 0$.

or g est croissante sur $[1;+\infty[$

avec $g(\alpha) = 0$ donc

pour $1 \leq x \leq \alpha$ on a $g(x) \leq g(\alpha)$

$g(x) \leq 0$

pour $x \geq \alpha$ on a $g(x) \geq g(\alpha)$

$g(x) \geq 0$

en conclusion

sur $[0;\alpha[$ $g < 0$

sur $]\alpha;+\infty[$ $g > 0$

$g(\alpha) = 0$.

Rq

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1-

a) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+x} = \dfrac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1+xe^{-x})}$

$= \dfrac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$ donc $f(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$

d'où $\boxed{f(x) = \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et

La droite $y=1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

2°a) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+x)-(e^x+1)(e^x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+xe^x-e^{2x}-2e^x-1}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)-1}{(e^x+1)^2} \text{ or}$$

$g(x)=e^x(x-2)-1$ donc

$$\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x+x)^2}}$$

b) $(e^x+x)^2>0$ et $f'(x)$ est de signe de $g(x)$.

sur $[0;\alpha[$ $f'<0$ et f est décroissante sur $[0;\alpha]$

sur $]\alpha;+\infty[$ $f'>0$ et f est croissante sur $[\alpha;+\infty[$

Tableau de variation de f

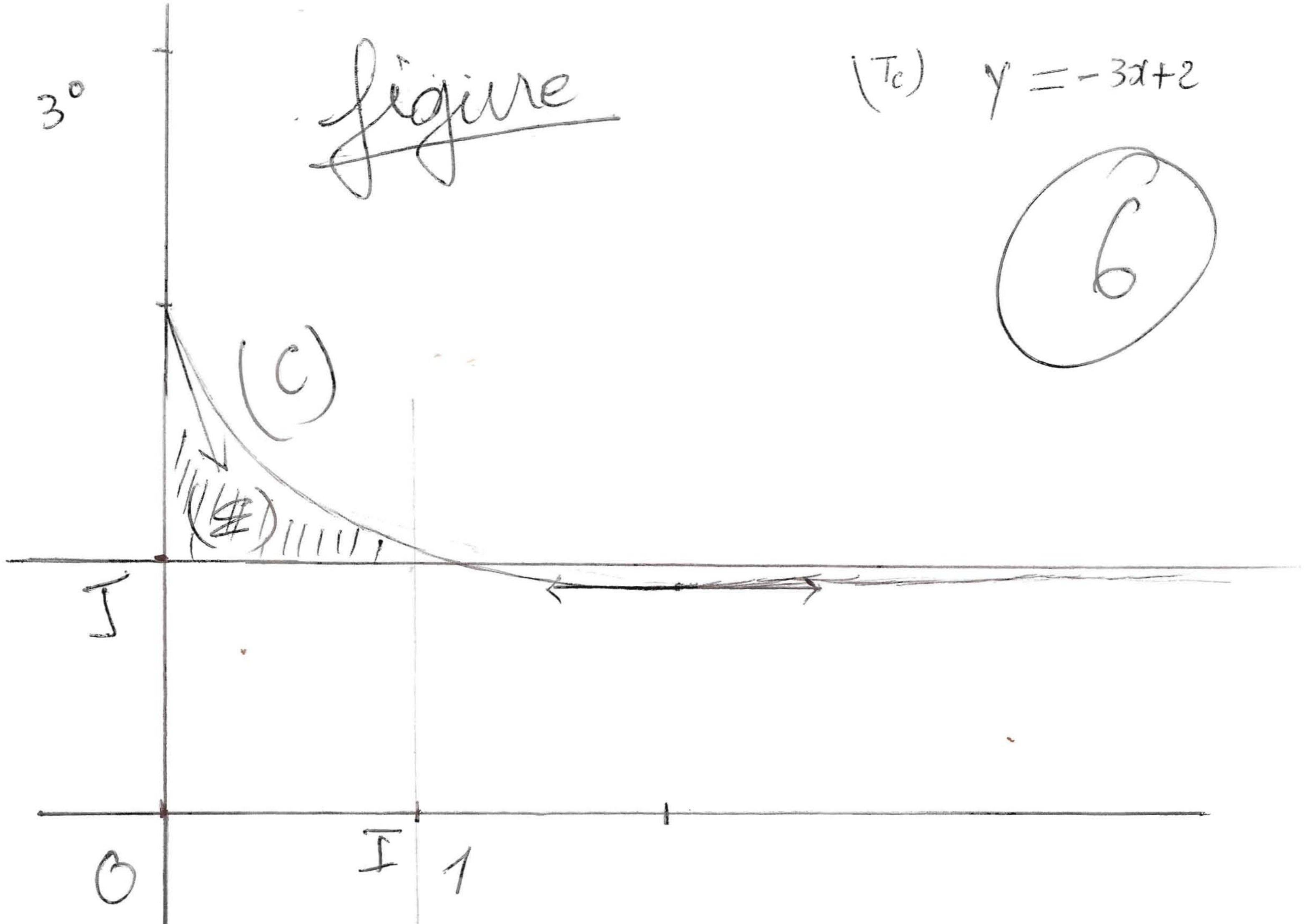
x	0		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

3° Tracé de (C)

$\alpha \simeq 2,1$

$f(\alpha) \simeq 0,9$

3° figure



Partie c

1- Voir figure

2- $F(x) = \ln|e^x + x|$ ou

$$\boxed{F(x) = \ln(e^x + x)}$$

3° $\mathcal{E} = \left(\int_0^1 (f(x) - 1)\,dx\right) \times 16\ cm^2$

$\mathcal{E} = [F(x) - x]_0^1 = (\ln(e+1) - 1) \times 16\ cm^2$

$$\boxed{\mathcal{E} \simeq 5\ cm^2}$$