MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO
Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION – TRAVAIL – JUSTICE

BAC BLANC , FEVRIER 2011
Epreuve 2 de MATHEMATIQUES

Série : C&E
Durée : 4h
Coeff : 5

EXERCICE 1. (5 points)

L'unité choisie est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère deux points A et O tels que : AO = 1,5.
Soit f la similitude plane directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On pose B = f (A) et C = f (B).
1° a) Construire les points B et C puis le milieu I du segment [B C].
b) Démontrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle ($\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$) et que : BC = 2 BA .
En déduire que le triangle IAB est équilatéral et que le triangle ABC est rectangle en A .
2° Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. D,E et F sont les points tels que B=R(D), E=R(C) et F=f(D).
a) Construire les points E , D puis F .
b) Démontrer que les points A, D, B et O sont cocycliques. En déduire que B , F, C et O sont cocycliques.
c) Soit (C_1) le cercle circonscrit au triangle ABD ; (C_2) le cercle circonscrit au triangle BCF et (C_3) le cercle circonscrit au triangle ACE .
Tracer les trois cercles et démontrer que les trois cercles ont le point O en commun.

EXERCICE 2 (4points) .

1°) A et B sont deux points distincts du plan orienté tels que AB = 6 (prendre 1 cm pour unité).
Déterminer et construire sur le même graphique et avec des couleurs différentes :
E_1 ensemble des points M tels que ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) = $-\frac{\pi}{3}$ [π]
E_2 ensemble des points M tels que ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) = $\frac{\pi}{3}$ [2π]
E_3 ensemble des points M tels que ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) = $-\frac{2\pi}{3}$ [2π]
E_4 ensemble des points M tels que ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) = $-\frac{\pi}{3}$ [2π]
2°) Dans une urne , il y a quatre jetons sur chacun desquels est inscrit le nom d'un ensemble du 1° ; tous les jetons portent des noms différents.
On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne ; on note à chaque tirage le nom de l'ensemble inscrit sur le jeton tiré. Tous les tirages sont supposés équiprobables.
On appelle X la variable aléatoire associé à l'expérience ci-dessus et qui prend la valeur :
* 3 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont égaux.
* 2 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont symétriques par rapport à la droite (AB)
* 1 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont différents et tels que l'un soit contenu dans l'autre.
* m dans tous les autres cas .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer le réel m pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.

PROBLEME (11 points)

Partie A : Pour n entier naturel non nul , soit f_n la fonction définie sur $I = [\,0\,;+\infty\,[$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Soit a un élément non nul fixé dans I. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx$.

1° Justifier l'existence de $I_n(a)$. Calculer $I_0(a)$.

2° a)Montrer que ,pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n'(0) = 0$.

En déduire que , pour tout $n \geq 1$, $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$.

b) En déduire que , pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - (\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!})e^{-a}$.

3° Dans cette question, on pose a = 1.

On appelle (U_n) la suite numérique définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $U_n = 1 - (\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé d'unité graphique 3 cm .

a) Montrer que , pour tout entier naturel n , $U_n \geq 0$ et donner une interprétation géométrique de U_n .

b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout x élément de $[\,0\,;1\,]$, $f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n$.

c) En déduire que : pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ .Déterminer la limite de U_n en $+\infty$.

d) Déduire enfin que : $e = \lim\limits_{n \to +\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur$[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.(C) est la courbe représentative de f .

1°a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que ,pour tout $x > 0$ $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

c) En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

d) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2°a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

b) Construire (Δ) et (C) dans un repère orthonormé (O , I , J) d'unité 3 cm.

Partie C

Pour tout x élément de $[\,0\,;+\infty\,[$,on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})dt$. On ne cherchera pas à calculer F(x).

1°a) Montrer que F est bien définie et positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b) Soit λ un réel strictement positif, en utilisant la question1°de la partie B, interpréter graphiquement $F(\lambda)$.

2°a) Justifier que F est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et calculer $F'(x)$.

b) Etudier le sens de variation de F sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

3° Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que ,pour tout t élément de $[\,1\,;1+a\,]$ on a $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

b) En appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction ln , établir que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.

4° Soit x un réel strictement positif .

Déduire de la question 3°, que : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$ et

$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} .$$

5° On admet que la limite de F (x), en $+\infty$ existe et est un nombre réel noté k.

Etablir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leq k \leq \frac{1}{2}$

6° Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = \int_n^{n+1}\ln(1 + e^{-2t})\,dt$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$

b) Déterminer la limite de la suite (U_n) en $+\infty$.

Corrigé sujet 2 Math BAC BLANC 2011 LJAA

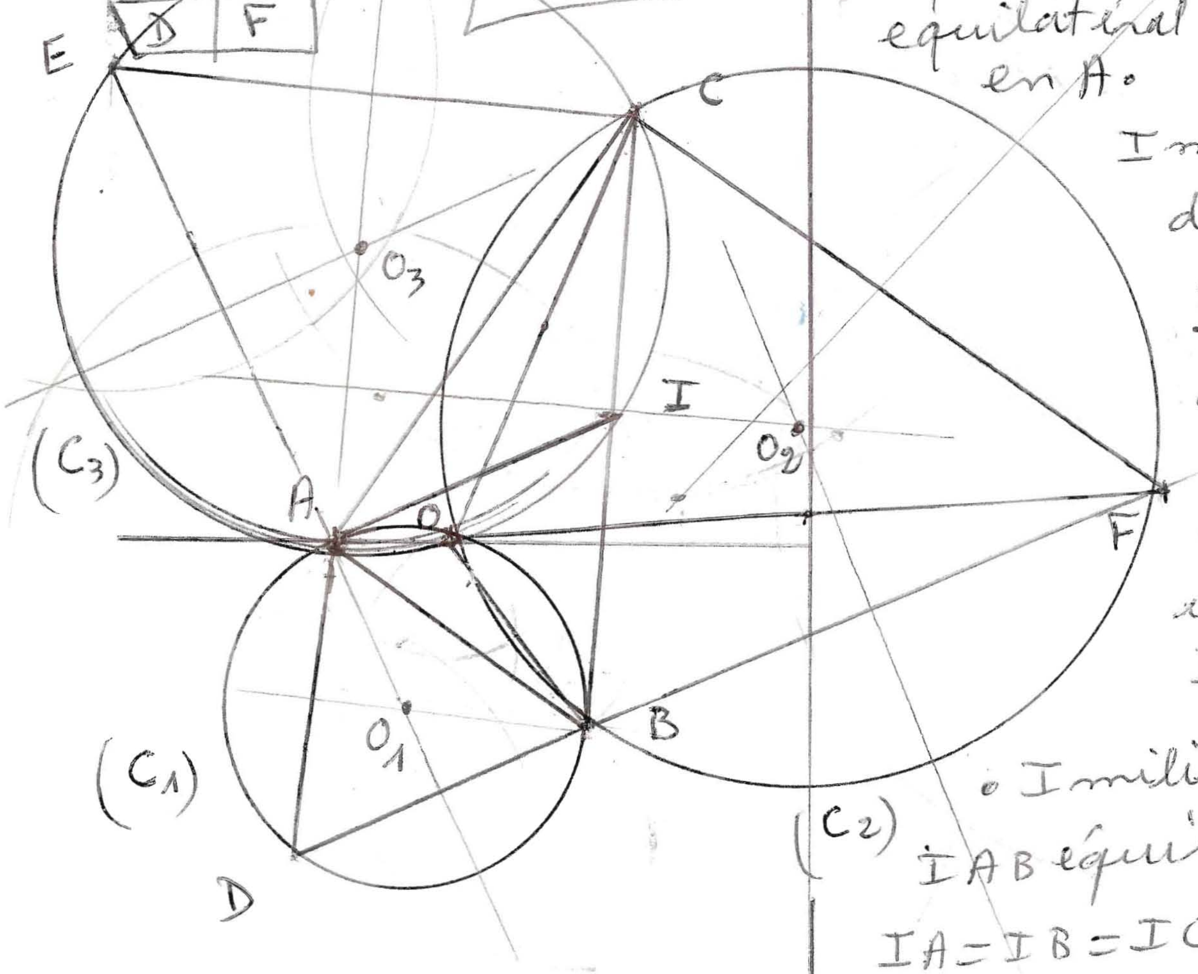
I

1°) $f = S(O\,;\,2\,;\,\frac{2\pi}{3})$ et $R = r(A, \frac{\pi}{3})$

a)

f	
O	O
A	B
B	C
D	F

R	
A	A
D	B
C	E



b) Démontrons que

$(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $BC = 2BA$

$(\vec{BC}, \vec{BA}) = (\vec{BC}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{BA})$

$= -(\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{AB}, -\vec{AB})$

$= -\frac{2\pi}{3} + \pi$ car f est une simil. directe d'angle $\frac{2\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3}$ et $f([AB]) = [BC]$.

d'où $\boxed{(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$

• f est une similitude de rapport 2 donc multiplie les longueurs par 2 et

$\boxed{BC = 2BA}$

• Déduisons en que IAB est équilatéral et ABC rectangle en A.

I milieu de $BC = 2BA$

donc $IB = IC = BA$

$IB = BA$ et $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$

donc le triangle IAB est équilatéral car isocèle avec un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

• I milieu de [BC] et IAB équilatéral donc $IA = IB = IC$ ainsi le triangle ABC est rectangle en A car I milieu du côté [BC] est équidistant de A, B et C.

Rq : D'après Al Kashi

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\,BA \times BC \times \cos\frac{\pi}{3}$

$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BA^2 = BC^2 - BA^2$

$AC^2 + BA^2 = BC^2$ et alors ABC est rectangle en A.

2° a) construction des points D, E et F (Voir figure)

b) Montrons que A, D, B et O sont cocycliques et déduisons ~~en~~ que B, F, C et O sont cocycliques.

$$R(D) = B \iff \begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le triangle ABD est équilat.

et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

f est une similtitude directe de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $f(A)=B$

donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

or $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ donc

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) + \pi\ [2\pi]$

les points O, A, D et B n'étant pas alignés ($\frac{2\pi}{3} \neq 0\ [\pi]$) sont cocycliques.

. L'image d'un cercle par une similitude est un cercle.

comme A, B, D et O sont cocy. alors leurs images B, C, F et O par f sont cocycliques.

c) Montrons que les trois cercles ont le point O en commun.

(C_1) est le cercle passant par A, B, D, O

(C_2) est le cercle passant par B, F, C, O

donc $O \in (C_1) \cap (C_2)$ et il reste à prouver que $O \in (C_3)$.

$$R(C) = E \iff \begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

ACE est alors un triangle equilatéral de sens direct et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$

$= \frac{4\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3} + \pi$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3} + \pi\ [2\pi]$ donc

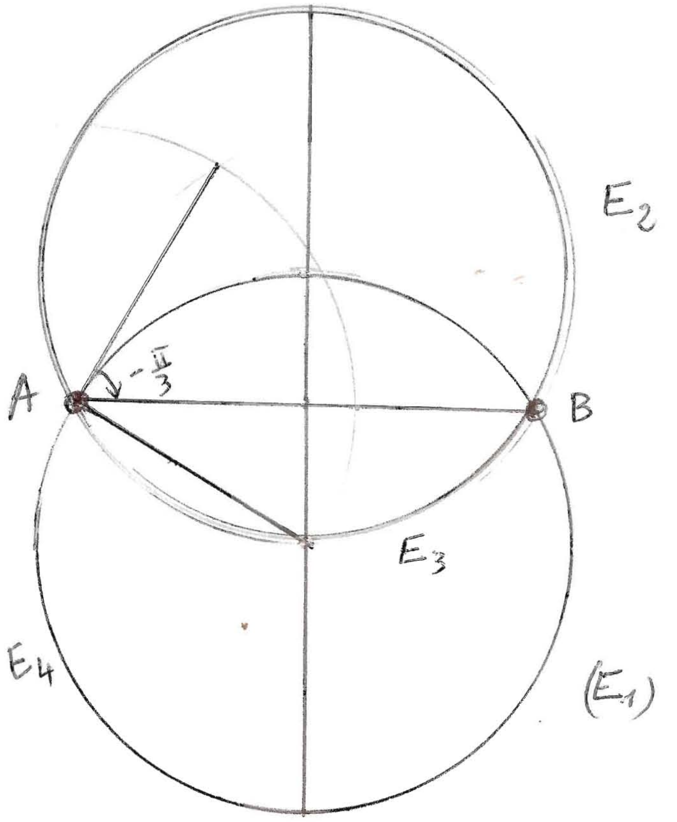
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) + \pi\ [2\pi]$

$\frac{4\pi}{3} \neq 0\ [2\pi]$

les points O, A, C et E n'étant pas alignés sont cocycliques et $O \in (C_3)$.

En conclusion les trois cercles passent par le point O.

II AB = 6 cm (3)



- E_1 est le cercle capable du segment [AB] ou de corde [AB] et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ modulo π.
- E_2 est l'arc capable du segment [AB] et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π

  ou encore

  E_2 est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.
- E_3 est l'arc capable du segment [AB] et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π

  ou encore

  E_3 est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π.
- E_4 est l'arc capable du segment [AB] et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

  ou encore

  E_4 est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

2° Tableau pondéré ou cartésien

1 \ 2	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	$\overset{3}{E_1E_1}$	$\overset{m}{E_1E_2}$	$\overset{m}{E_1E_3}$	$\overset{1}{E_1E_4}$
E_2	$\overset{m}{E_2E_1}$	$\overset{3}{E_2E_2}$	$\overset{m}{E_2E_3}$	$\overset{2}{E_2E_4}$
E_3	$\overset{m}{E_3E_1}$	$\overset{m}{E_3E_2}$	$\overset{3}{E_3E_3}$	$\overset{m}{E_3E_4}$
E_4	$\overset{1}{E_4E_1}$	$\overset{2}{E_4E_2}$	$\overset{m}{E_4E_3}$	$\overset{3}{E_4E_4}$

a) Loi de Probabilité de X

x_i	1	2	3	m
p_i	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

b) $E(X) = \frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{6}{8}+\frac{4m}{8}$

$E(X) = \frac{9+4m}{8}$

$E(X) = 0 \iff 9+4m=0 \iff \boxed{m=-\frac{9}{4}}$

Problème

Partie A

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ $I = [0;+\infty[$

$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx$

1° calculons $I_n(0)$:

$I_0(a) = \int_0^a f_0(x)\,dx = -\left[e^{-x}\right]_0^a = 1 - e^{-a}$

2° Montrons que $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$, que $f_n(0) = 0$ pour en déduire que $\forall n \geq 1$ $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$.

f_n est derivable sur I et

$f_n'(x) = \frac{1}{n!}\left[n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}\right]$

$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

$= f_{n-1}(x) - f_n(x)$ donc

$\boxed{f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)}$

$\boxed{\text{et } f_n'(0) = 0 - 0 = 0}$

avec $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$

on a par integration sur $[0;a]$

$\int_0^a f_n'(x) = \int_0^a f_{n-1}(x)\,dx - \int_0^a f_n(x)\,dx$

$\left[f_n(x)\right]_0^a = I_{n-1}(a) - I_n(a)$

d'où $I_{n-1}(a) - I_n(a) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$

d'où $\boxed{I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n e^{-a}}{n!}}$

3° Dedusons que

$\forall n \geq 1$ $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) e^{-a}$

avec $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n e^{-a}}{n!}$ on a :

au rang 1 $I_1(a) - I_0(a) = -\frac{a e^{-a}}{1!}$

au rang 2 $I_2(a) - I_1(a) = -\frac{a^2}{2!} e^{-a}$

$I_3(a) - I_2(a) = -\frac{a^3}{3!} e^{-a}$

$\vdots$

au rang n $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}$

Par addition membre à membre et après simplification on a :

$I_n(a) - I_0(a) = -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) e^{-a}$

or $I_0(a) = 1 - e^{-a} = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a}$

d'où $\boxed{I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right) e^{-a} \quad \forall n \geq 1}$

4° on pose $a = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) f_n continue et positive car f_n derivable et $x^n \geq 0$, $e^{-x} > 0$ $n! > 0$

donc $U_n \geq 0$ et

(5)

U_n est l'aire en u.a de la partie du plan limitée par (C_n), l'axe des abscisses et les droites d'equation $x=0$ et $x=1$.

b) Montrons que : $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{0}$ (car $x \mapsto e^{x}$ ↗)

$\Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq 1$ car $e^{-1} > 0$ et $e^{0}=1$

$\forall x \geq 0$ $0 \leq \frac{x^n}{n!}e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!}$ d'où

$\forall x \in [0;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

c) Déduisons que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$ et par integration sur $[0;1]$ on a : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!}dx$

$0 \leq U_n \leq \frac{1}{n!}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ car $(n+1)\,n! = (n+1)!$

d'où $\boxed{0 \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ donc par encadrement $\boxed{\lim\limits_{+\infty} U_n = 0}$

d) Déduisons enfin que :

$e = \lim\limits_{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$

avec $U_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1}$

on a $eU_n = e - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$

comme $\lim U_n = 0$ on a $\lim eU_n = 0$

et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

PARTIE B

$f(x) = \ln(e^{x} + e^{-x})$, $x \in [0;+\infty[$

1°a) calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} + e^{-x} = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} e^{x} = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b) Montrons que $\forall x \geq 0$ $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$

$f(x) = \ln e^{x}(1 + e^{-2x}) =$

$f(x) = \ln e^{x} + \ln(1 + e^{-2x})$

$\boxed{f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x}) \quad \forall x \geq 0}$

c) Montrons que (Δ) $y = x$ est une asymptote oblique à (C)

$f(x) - y = \ln(1+e^{-2x})$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} 1+e^{-2x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$ donc la droite (Δ) est une asymptote oblique à (C).

d) Position de (C) par rapport à (Δ).

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad e^{-2x} > 0 \quad 1+e^{-2x} > 1$

$\Rightarrow f(x) - y = \ln(1+e^{-2x}) > 0$

et (C) au dessus de (Δ) sur $[0; +\infty[$.

2° Sens de variation et tableau de variation de f.

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$f'(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{e^{x}(1 - e^{-2x})}{e^{x} + e^{-x}}$

$e^{x} > 0$, $e^{x} + e^{-x} > 0$

$1 - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow -e^{-2x} \geq -1 \Leftrightarrow e^{-2x} \leq 1$

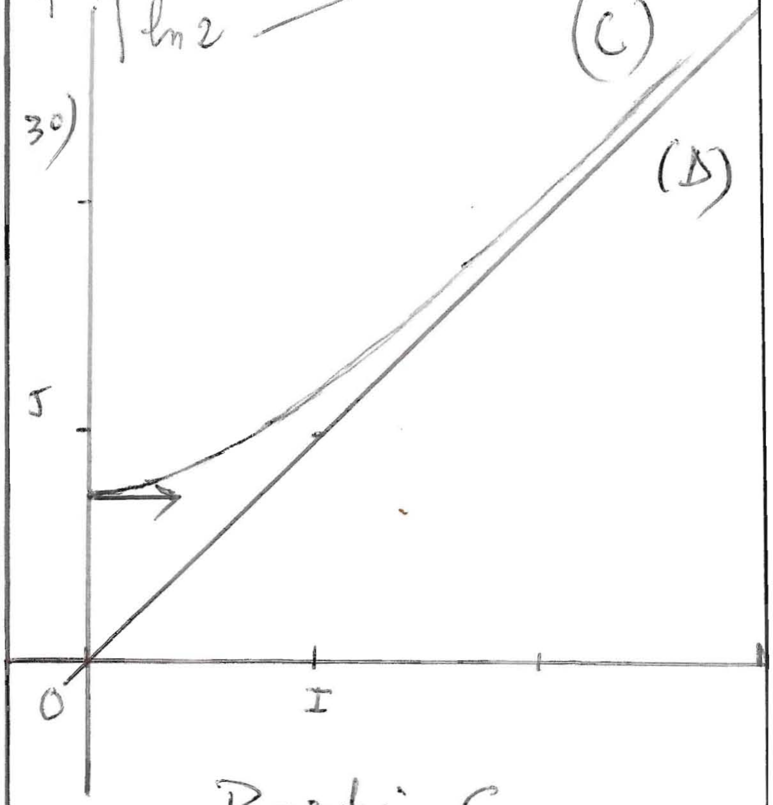
$\Leftrightarrow -2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ d'où

$\forall x \geq 0$ $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $[0; +\infty[$.

b) Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3°)



Partie C

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$

1° a- Montrons que F est bien définie et positive sur $[0; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \ln(1+e^{-2x})$ est continue sur $[0; +\infty[$ car $x \mapsto 1+e^{-2x}$ continue et strictement positive sur $[0; +\infty[$; de plus $0 \in [0; +\infty[$ donc F $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$ est bien définie sur $[0; +\infty[$ et $F \geq 0$.

car $1+e^{-2t} \geq 1 \Rightarrow \ln(1+e^{-2t}) \geq 0$

et $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt \geq 0$

En conclusion F est définie et positive sur $[0\,;+\infty[$.

b) avec $F(d) \geq 0$ et

$f(x) - y = \ln(1+e^{-2x})$

$F(d)$ est l'aire en u.a. de la partie du plan limitée par (C), la droite (Δ) et les droites $x=0$ et $x=d$.

2°a) F étant la primitive sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+e^{-2x})$ qui s'annule en 0, F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $F'(x) = \ln(1+e^{-2x})$.

b) $F'(x) > 0$ donc F est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3° a) Montrons que $\forall t \in [1\,;1+a]$ on a : $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

$t \in [1\,;1+a] \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 1+a$

$\Rightarrow \frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

b) La fonction $\ln$ est dérivable sur $[1\,;1+a]$ et $\frac{1}{1+a} \leq (\ln)'(t) \leq 1$

en utilisant l'inégalité des accroissements finis à $[1\,;1+a]$ avec $1 \leq 1+a$ on a

$\frac{1}{1+a}(1+a-1) \leq \ln(1+a) - \ln 1 \leq 1(1+a-1)$

$\boxed{\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a \quad \forall a > 0}$

4° avec $e^{-2t} > 0$ on a en prenant $a = e^{-2t} > 0$

$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$

et $\forall x > 0$ on a : par intégration

$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$

$-\frac{1}{2}\Big[\ln(1+e^{-2t})\Big]_0^x \leq F(x) \leq -\frac{1}{2}\Big[e^{-2t}\Big]_0^x$

$-\frac{1}{2}\left(\ln(1+e^{-2x}) - \ln 2\right) \leq F(x) \leq -\frac{1}{2}(e^{-2x} - 1)$

d'où $\forall x > 0$

$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

$\lim\limits_{+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} e^{-2x} = 0$

avec $\lim F(x) = k$ on a alors

$\boxed{\frac{1}{2}\ln 2 \leq k \leq \frac{1}{2}}$

6° $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt$ (8)

a) Montrons que

$0 \leq U_n \leq \ln(1+e^{-2n})$

$n \leq t \leq n+1 \Rightarrow -2(n+1) \leq -2t \leq -2n$

$\Rightarrow e^{-2(n+1)} \leq e^{-2t} \leq e^{-2n}$ car exp $\nearrow$

$\Rightarrow 1+e^{-2(n+1)} \leq 1+e^{-2t} \leq 1+e^{-2n}$

$\Rightarrow \ln(1+e^{-2(n+1)}) \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq \ln(1+e^{-2n})$

or $1+e^{-2(n+1)} > 1$ et $\ln(1+e^{-2(n+1)}) \geq 0$ $\forall n$

donc

$0 \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq \ln(1+e^{-2n})$

par intégration sur $[n, n+1]$

on a :

$0 \leq \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) \leq \ln(1+e^{-2n})$

car $n+1-n = 1$.

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{0 \leq U_n \leq \ln(1+e^{-2n})}$

b) $\lim\limits_{+\infty} \ln(1+e^{-2n}) = 0$

donc $\lim U_n = 0$

par encadrement.