L. E. R. N. B. ANNEE SCOLAIRE 2004 / 2005

BACCALAUREAT BLANC SESSION DE MAI 2005
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SERIE C
DUREE : 4 HEURES

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique 2 cm).
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (-\sqrt{3} + i)z$ et on définit une suite de points (M_n) de la façon suivante :
M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n

1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
Placer sur le dessin les points M_0, M_1, M_2.
Justifier que les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables.

2- Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3- Soient deux entiers naturels n et p. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur n et p pour que les points O, M_n et M_p soient alignés.

4- Soit k un entier relatif.
On considère l'équation (E_k) : $12x - 5y = k$ dont l'inconnue est le couple (x ; y).

a. Justifier que l'équation (E_k) a au moins une solution et indiquer une méthode permettant de trouver une solution particulière de (E_k).
b. Résoudre l'équation (E_3) : $12x - 5y = 3$. (On pourra éventuellement vérifier que le couple (-6 ; -15) est une solution particulière)
c. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox).

EXERCICE 2

Soit **(P)** un plan euclidien, O un point de **(P)**, **V** le plan vectoriel associé à **(P)**, α un réel appartenant à l'intervalle $]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaires de **V** tels que :
$\vec{i}.\vec{j} = \sin\alpha$

1- Démontrer que (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère de **(P)**.

2- Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est orthonormé.

3- Dans toute la suite, on suppose que (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est orthonormé. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans **(P)**.

a. Etudier les variations de f et démontrer que le point O est un point d'inflexion de (C).
b. Démontrer que f établit une bijection de IR sur un intervalle I que l'on précisera.

4- Soit h la restriction de f à l'intervalle [0 ; 1] et (C_h) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), D le domaine plan limité par (C_h) et les droites d'équations respectives x = 0 ; x = 1 et y = 0. On désigne par V_D le volume de la portion de l'espace engendrée par la rotation de D autour de l'axe des abscisses. Calculer la valeur exacte de V_D.
On pourra remarquer que $(2^x-1)^2 = (2^x + 1)^2 - 4(2^x)$

PROBLEME

PARTIE A *Etude d'une fonction exponentielle*

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1- On note f ', f '' et $f^{(3)}$ les dérivées successives de f. Etablir que :
$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f^{(3)}(x) = 4x(3-2x^2)e^{-x^2}$

2- Etudier les variations de f '' et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

3- En déduire que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| \leq 2$

PARTIE B *Calcul approché d'une intégrale.*

On souhaite obtenir une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à 10^{-2} près.

B1

Soit u la fonction affine croissante définie par $u(x) = \alpha x + \beta$ et soit g la fonction composée définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad g(x) = (f\circ u)(x)$. On pose $\phi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.

1- Sans chercher à calculer $\phi(x)$, établir que si G est une primitive de la fonction g alors :
$\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \phi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$.

2- En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \phi''(x) = g'(x) - g'(-x)$.

3- a. Démontrer en utilisant **PARTIE A 3-** que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |g''(x)| \leq 2\alpha^2$.

b. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ |\phi''(x)| \leq 4\alpha^2 x$

c. Par intégrations successives, démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ -\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \leq \phi(x) \leq \frac{2}{3}\alpha^2 x^3$.

c. Encadrer $\phi(1)$ et en déduire que : $-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{+1} g(t)dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$.

B2

1- Démontrer que $\int_{-1}^{+1} g(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)du$

2- On se place dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2n}$ et $\beta = \frac{2k+1}{2n}$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Etablir que :

$$\forall\ k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \quad -\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$$

3- En déduire que :

$$\left| \int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$

4- Déterminer le plus petit entier n qu'il faut prendre pour avoir une valeur approchée de I à 10^{-2} près. En déduire que I a une valeur approchée de 0,75.

PARTIE C *Etude d'une fonction définie par une intégrale*

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1- Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2- Etudier la parité de F.

3- Quel est le sens des variations de F ?

4- a. Démontrer que $\forall\, t \geq 1,\ e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite de terme général $u_n = F(n)$. Démontrer que cette suite est croissante et majorée par $I + \frac{1}{e}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $L \leq 1{,}13$.

d. Quelle conclusion obtient – on en ce qui concerne la limite de la fonction F lorsque x tend vers $+\infty$?

BAC BLANC 2005

CORRIGE SUJET MATHS Série C

Barème

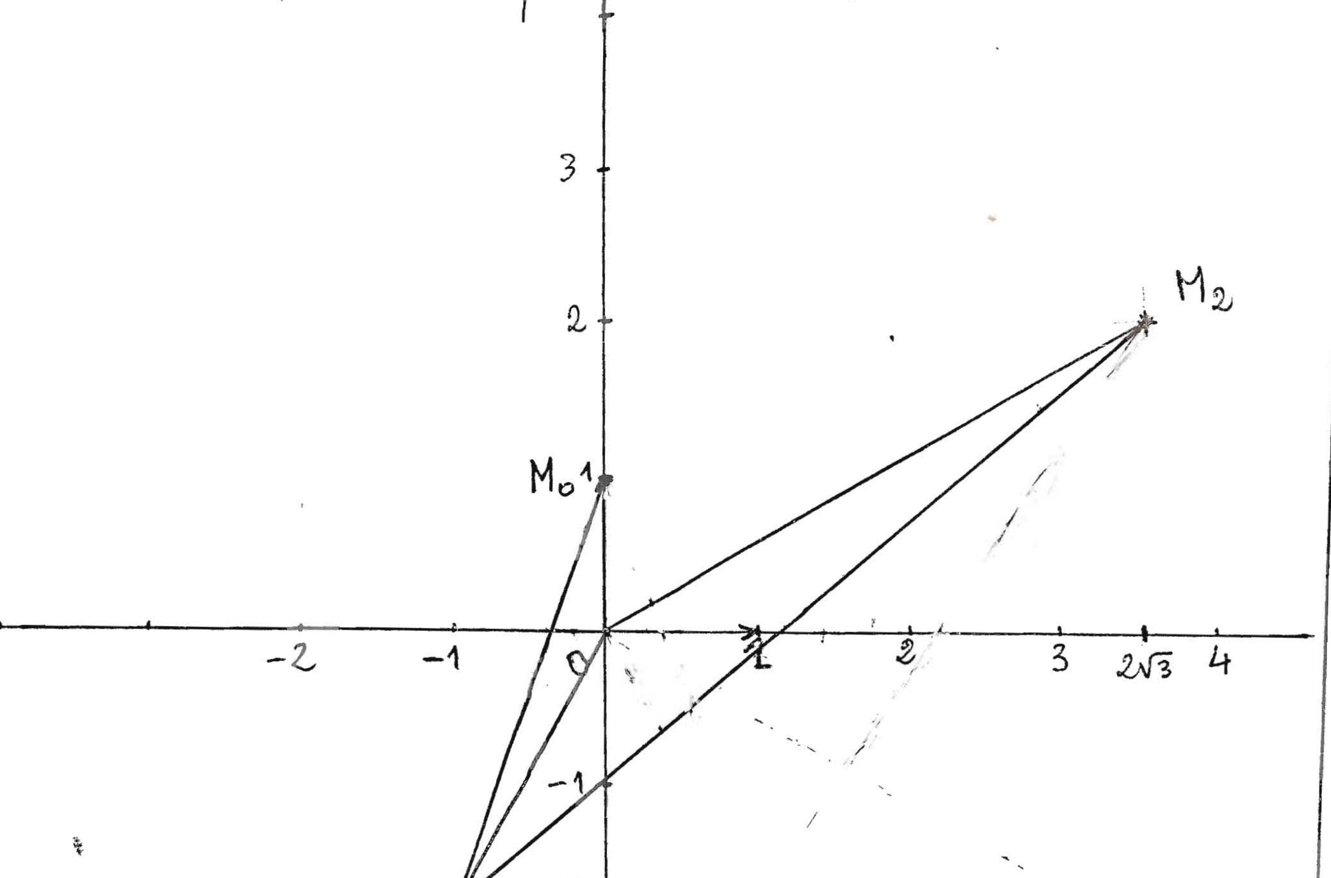
EXERCICE 1

$M(z)$, $M'(z')$ $f(M)=M'$ avec $z'=(-\sqrt{3}+i)z$.

$(M_n)_n$ | $M_0(z_0=e^{i\frac{\pi}{2}})$, $f(M_n)=M_{n+1}$. $M_n(z_n)$.

1- Nature et éléments caractéristiques de f.
L'écriture complexe de f est de la forme $z'=az+b$
avec $a=-\sqrt{3}+i$ et $b=0$
f est la similitude directe plane de centre O,
de rapport $k=|-\sqrt{3}+i|=2$ et d'angle $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ — 0,75

- Plaçons les points $M_0(i)$, $M_1(-1-i\sqrt{3})$; $M_2(2\sqrt{3}+2i)$ — 0,75



- Justifions que OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables:
utilisation de f: $O\mapsto O$; $M_0\mapsto M_1$ $M_1\mapsto M_2$ d'où
$\frac{OM_1}{OM_0}=\frac{OM_2}{OM_1}=\frac{M_1M_2}{M_0M_1}=2$ (rapport de f) d'où le résultat. — 0,50

- Justifions que OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables. Par calculs

$$\frac{OM_0}{OM_1} = \frac{|z_0|}{|z_1|} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{M_0M_1}{M_1M_2} = \frac{|z_1 - z_0|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|-1 - i(\sqrt{3}+1)|}{|2\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+2)|} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{\sqrt{4(5+2\sqrt{3})}} = \frac{1}{2}$$

d'où les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables

2- Démontrons que $z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$ par récurrence.

$$z_1 = (-\sqrt{3}+i)z_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot i = 2^1 e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5 \times 1 \times \pi}{6}\right)}$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$

Supposons que la propriété soit vraie à l'ordre p.

$$z_p = 2^p e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{6}\right)}$$

$M_p(z_p)$, $f(M_p) = M_{p+1}$ donc $z_{p+1} = (-\sqrt{3}+i) \cdot z_p$ 0,50

$$z_{p+1} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot 2^p e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{6}\right)} = 2^{p+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(p+1)\pi}{6}\right)}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $p+1$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$

Autre méthode; voir aussi suite géom pour les affixes des M_n

3- O, M_n et M_p sont alignés si et seulement si

$$\frac{z_p}{z_n} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{z_p}{z_n}\right) = q\pi \ (q \in \mathbb{Z}) \iff \arg\left(\frac{2^p e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{6}\right)}}{2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}}\right)$$

$$= q\pi \iff \arg\left(2^{p-n} e^{i(p-n)\frac{5\pi}{6}}\right) = q\pi \iff (p-n)\frac{5\pi}{6} = q\pi$$

$$\iff 5(p-n) = 6q \quad (1)$$

$5 | 6q$ et $(5,6) = 1$ donc $5 | q$. Par suite $q = 5u$, $u \in \mathbb{Z}$. 0,50

(1) $\iff p - n = 6u$, $u \in \mathbb{Z} \iff p \equiv n\ [6]$.

4- Soit $k \in \mathbb{Z}$. (E_k): $12x - 5y = k$.

a. Les nombres 12 et 5 sont premiers entre eux : donc d'après Besout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $12u + 5v = 1$. Donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $12(ku) + 5(kv) = k$.
En posant $x = ku$ et $y = -kv$ on obtient une solution de (E_k). 0,50

Méthode permettant de trouver une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD.

n	12	5
div	5	2
quot.	2	2
reste	2	1

$12 = 5 \times 2 + 2$ et $5 = 2 \times 2 + 1$

$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(12 - 5 \times 2)$

$= 5 - 2 \times 12 + 4 \times 5 = 5 \times 5 - 2 \times 12$

$-2(12) + 5(5) = 1$

En multipliant par k on a : $12(-2k) - 5(5k) = k$.
D'où une solution particulière est $(-2k ; -5k)$. 0,25

b. Résolution de (E_3) : $12x - 5y = 3$
Ici $k = 3$ d'où une solution particulière est $(-6 ; -15)$; $12(-6) - 5(-15) = -72 + 75 = 3$ donc $(-6 ; -15)$ est aussi une solution particulière.

$12x - 5y = 3 = 12(-6) - 5(-15) \Leftrightarrow 12(x+6) = 5(y+15)$ 0,75

$5 \mid 12(x+6)$ et $(5, 12) = 1$ donc $5 \mid x+6$ donc $x + 6 = 5q, q \in \mathbb{Z}$

$x = 5q - 6 ; q \in \mathbb{Z}$. et $y = 12q - 15$

$S = \{(5q-6 ; 12q-15)\ q \in \mathbb{Z}\}$

c. $M_n \in [Ox) \Leftrightarrow z_n \in [0 ; +\infty[\Leftrightarrow z_n = 0$ ou $\arg z_n = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow z_n = 0$ ou $\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} = 2k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} z_n = 0 \\ 12k - 5n = 3. \end{cases}$

$\Leftrightarrow z_n = 0$ ou $n = 12q - 15$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

Or $z_n = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$M_n \in [Ox) \Leftrightarrow M = O$ ou $n = 12q - 15$; $q \in \{2 ; 3, \dots\}$ 0,50

Conclusion

$M_0 \neq O$, alors $M_n \in [Ox) \Leftrightarrow n = 12q - 15$, $q \in \{2; 3; \dots\}$

EXERCICE 2

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, $\alpha \in]+\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \sin\alpha$.

1- Montrons que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de (P).

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non nuls.
- Soit $\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{j}})$. $\vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \cos\theta = \cos\theta = \sin\alpha$

Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étaient colinéaires, alors $\cos\theta = 1$ ou $\cos\theta = -1$ donc $\sin\alpha = 1$ ou $\sin\alpha = -1$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \notin \{\frac{3\pi}{2}\}$ donc $\sin\alpha \neq -1$ et $\sin\alpha \neq 1$

donc $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. 0,50

Conclusion. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de (P)

2- $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ (car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$)

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[\\ \alpha = \pi \end{cases}$

$((O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé $) \Longleftrightarrow (\alpha = \pi)$ 0,50

3- $(O; \vec{i}, \vec{j})$ supposé orthonormé.

$f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ (C) courbe de f dans (P)

a.- Variations de f.

$D_f = \mathbb{R}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\ln 2 . 2^x (2^x + 1) - \ln 2 . 2^x (2^x - 1)}{(2^x + 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2 \ln 2 . 2^x}{(2^x + 1)^2}$. 0,50

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 0,25

- Montrons que O est un point d'inflexion pour (C)

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$f''(x) = \frac{2(\ln 2)^2 \cdot 2^x (2^x+1)^2 - 2\ln 2 \cdot 2^x \cdot 2\ln 2 \cdot 2^x (2^x+1)}{(2^x+1)^4}$$

$$= \frac{2(\ln 2)^2 \cdot (2^x+1)\left(2^x(2^x+1) - 2 \cdot 2^x\right)}{(2^x+1)^4} = \frac{2(\ln 2)^2 \cdot 2^x (1-2^x)}{(2^x+1)^3}$$ 0,50

d'où $f''(x)$ s'annule en 0 et change de signe.

Le point $O(0,0)$ est donc un point d'inflexion de (C) 0,25

b. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

Or $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x\ln 2} - 1}{e^{x\ln 2} + 1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x\ln 2} - 1}{e^{x\ln 2} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-x\ln 2}}{1 + e^{-x\ln 2}} = 1$$ 0,50

d'où f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]-1; 1[$.

4- h restriction de f à $[0;1]$. D domaine limité par (C_h), les droites d'équations $x=0$; $x=1$, $y=0$

V_D le volume de la portion engendrée par la rotation

- La section du solide engendré par un plan perpendiculaire à (Ox) est un disque de rayon $f(x)$

$$V_D = \int_0^1 \pi [f(x)]^2 dx \ (U.V). = \pi \int_0^1 \frac{(2^x-1)^2}{(2^x+1)^2} dx (U.V)$$ 0,50

$$= \pi \int_0^1 \frac{(2^x+1)^2 - 4 \cdot 2^x}{(2^x+1)^2} dx = \pi \int_0^1 \left(1 - 4\frac{2^x}{(2^x+1)^2}\right) dx \ .U.V.$$

$$= \pi \left[x + \frac{4}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2^x+1}\right]_0^1 U.V = \pi\left(1 - \frac{2}{3\ln 2}\right) .U.V.$$

$$V_D = \frac{\pi(3\ln 2 - 2)}{3\ln 2} .U.V$$ 0,50

PROBLEME

PARTIE A

$$f(x) = e^{-x^2}$$

1– f est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre et on a :

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$; $f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2}$; $f^{(3)}(x) = (8x+4x-8x^3)e^{-x^2}$

$f^{(3)}(x) = 4x(3-2x^2)\,e^{-x^2}$. 0,25

2– Variations de f''.

Le signe de $f^{(3)}$ est celui de $4x(3-2x^2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-2x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

0,25

f'' est croissante sur $]-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}]$ et sur $[0;\sqrt{\frac{3}{2}}]$

f'' est décroissante sur $[-\sqrt{\frac{3}{2}};0]$ et sur $[\sqrt{\frac{3}{2}};+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}) = 0$

La droite d'équation $y=0$ est asymptote aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

Tableau de Variation de f''

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e\sqrt{e}}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{4}{e\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

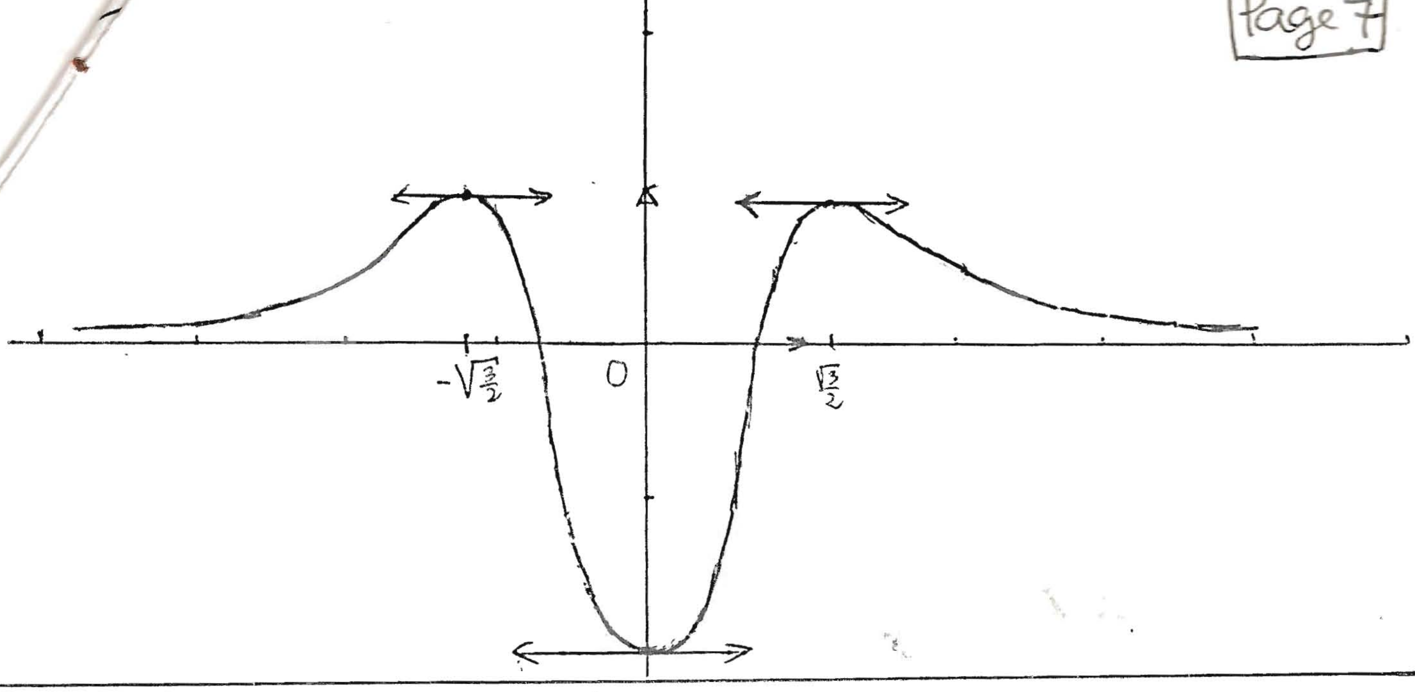
$\frac{4}{e\sqrt{e}} \simeq 0{,}89$

Voir graphique Page 7

0,25

3– $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{4}{e\sqrt{e}} \le |f''(x)| \le 2$ d'où :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $|f''(x)| \le 2$ 0,25



0,50

PARTIE B $\quad I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

B1 $\quad u(x) = \alpha x + \beta$, $g(x) = (f \circ u)(x)$; $\phi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$ $\quad x \in \mathbb{R}_+$

1- Soit G une primitive de g. On a :

$\phi(x) = [G(t)]_{-x}^{x} - 2xg(0) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$ 0,50

2- G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables. Donc ϕ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$\phi'(x) = g(x) + g(-x) - 2g(0)$ et $\phi''(x) = g'(x) - g'(-x)$ 0,50

3- a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(\alpha x + \beta)$; $g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)$

et $g''(x) = \alpha^2 f''(\alpha x + \beta)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta \in \mathbb{R}$ donc $|f''(\alpha x + \beta)| \leq 2$. 0,50

d'où $|g''(x)| \leq 2\alpha^2$.

b. On a : $|\phi^{(3)}(x)| = |g''(x) + g''(-x)| \leq |g''(x)| + |g''(-x)| \leq 4\alpha^2$ 0,25

Donc d'après les IAF appliqués à x et 0 avec $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $-4\alpha^2(x-0) \leq \phi''(x) - \phi''(0) \leq 4\alpha^2(x-0)$ 0,50

Soit $-4\alpha^2 x \le \phi''(x) \le 4\alpha^2 x$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|\phi''(x)| \le 4\alpha^2 x$

c. Intégrons successivement l'inégalité : $-4\alpha^2 x \le \phi''(x) \le 4\alpha^2 x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x -4\alpha^2 t\,dt \le [\phi'(t)]_0^x \le 4\alpha^2 \int_0^x t\,dt.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $-2\alpha^2 x^2 \le \phi'(x) - \phi'(0) \le 2\alpha^2 x^2$

$\phi'(0) = g(0) + g(0) - 2g(0) = 0$ donc

$-2\alpha^2 x^2 \le \phi'(x) \le 2\alpha^2 x^2$ | 0,25

$\int_0^x -2\alpha^2 t^2\,dt \le \int_0^x \phi'(t)\,dt \le \int_0^x 2\alpha^2 t^2\,dt$

$-\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \le \phi(x) - \phi(0) \le \frac{2}{3}\alpha^2 x^3$

or $\phi(0) = 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $-\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \le \phi(x) \le \frac{2}{3}\alpha^2 x^3$ | 0,50

d. Encadrement de $\phi(1)$. On a : $-\frac{2}{3}\alpha^2 \le \phi(1) \le \frac{2}{3}\alpha^2$

Déduction : $-\frac{2}{3}\alpha^2 \le \int_{-1}^{1} g(t)\,dt - 2g(0) \le \frac{2}{3}\alpha^2$ | 0,50

B2

1- Démontrons que $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)\,du.$

$u = \alpha x + \beta$, $du = \alpha\,dx$. donc $dx = \frac{1}{\alpha}du.$

si $x = -1$, $u = \beta - \alpha$ et si $x = 1$, $u = \beta + \alpha$. d'où

$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)\,du.$ | 0,50

2- On se place dans le cas : $\alpha = \frac{1}{2n}$, $\beta = \frac{2k+1}{2n}$

avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

$\beta - \alpha = \frac{k}{n}$, $\beta + \alpha = \frac{k+1}{n}$

$\int_{-1}^{+1} g(t)\,dt = 2n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du$ or d'après B_1d., | 0,25

$$-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{+1} g(t)dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4n^2} \leq 2n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - 2f(\beta) \leq \frac{2}{3}\frac{1}{4n^2}$$

$$-\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$$

d'où $\forall k \in \{0; 1; 2; \dots, n-1\}$, $-\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$ 0,75

3- Déduction:

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{12n^3} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{12n^3}$$

$$-\frac{1}{12n^2} \leq \int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^2}$$ 0,25

car $\sum_{k=0}^{n-1} \pm\frac{1}{12n^3} = \frac{\pm n}{12n^3} = \pm\frac{1}{12n^2}$

d'où $\left|\int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right| \leq \frac{1}{12n^2}$ 0,75

4 - Détermination du plus petit entier n.

Il suffit que $\frac{1}{12n^2} \leq 10^{-2}$ soit $n^2 \geq \frac{100}{12}$ donc

$n \geq \frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \simeq 2,886\right)$. d'où on prend $n = 3$. 0,25

Valeur approchée de I

$I \simeq \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-\frac{1}{36}} + e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{25}{36}}\right)$ 0,75

$\simeq \frac{1}{3}(0,9726044 + 0,7788007 + 0,4993517) \simeq 0,750025$

d'où $I \simeq 0,75$ à 10^{-2} près.

PARTIE C

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1- f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc F est définie et est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$. 0,25

2- Parité de F.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = \int_0^{(-x)} f(t)dt = \int_0^{x} f(u)(-du)$

Or $f(-u) = f(u)$ d'où $F(-x) = -\int_0^x f(u)du$. d'où F est impaire. 0,2

3- Variations de : F.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.
Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ d'où F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 0,25

4- a. $\forall t \geq 1$, $t^2 - t = t(t-1) \geq 0$ donc $t^2 \geq t$.

Par suite :

$t^2 \geq t \Leftrightarrow -t^2 \leq -t \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t}$. 0,25

b. $(U_n)_n$, $U_n = F(n) = \int_0^n f(t)dt$.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^{n+1} f(t)dt - \int_0^n f(t)dt = \int_n^0 f(t)dt + \int_0^{n+1} f(t)dt$$

$$= \int_n^{n+1} f(t)dt.$$

Or $f(t) > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ d'où $U_{n+1} - U_n > 0$. 0,25

La suite (U_n) est strictement croissante.

Montrons que (U_n) est majorée par $I + \frac{1}{e}$.

$$U_n = \int_0^n f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^n f(t)dt.$$

Or, d'après 4.a., $\int_1^n f(t)dt \leq \int_1^n e^{-t}dt$ et

$\int_1^n e^{-t}dt = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{e}$. 0,25

d'où $U_n \leq I + \frac{1}{e}$

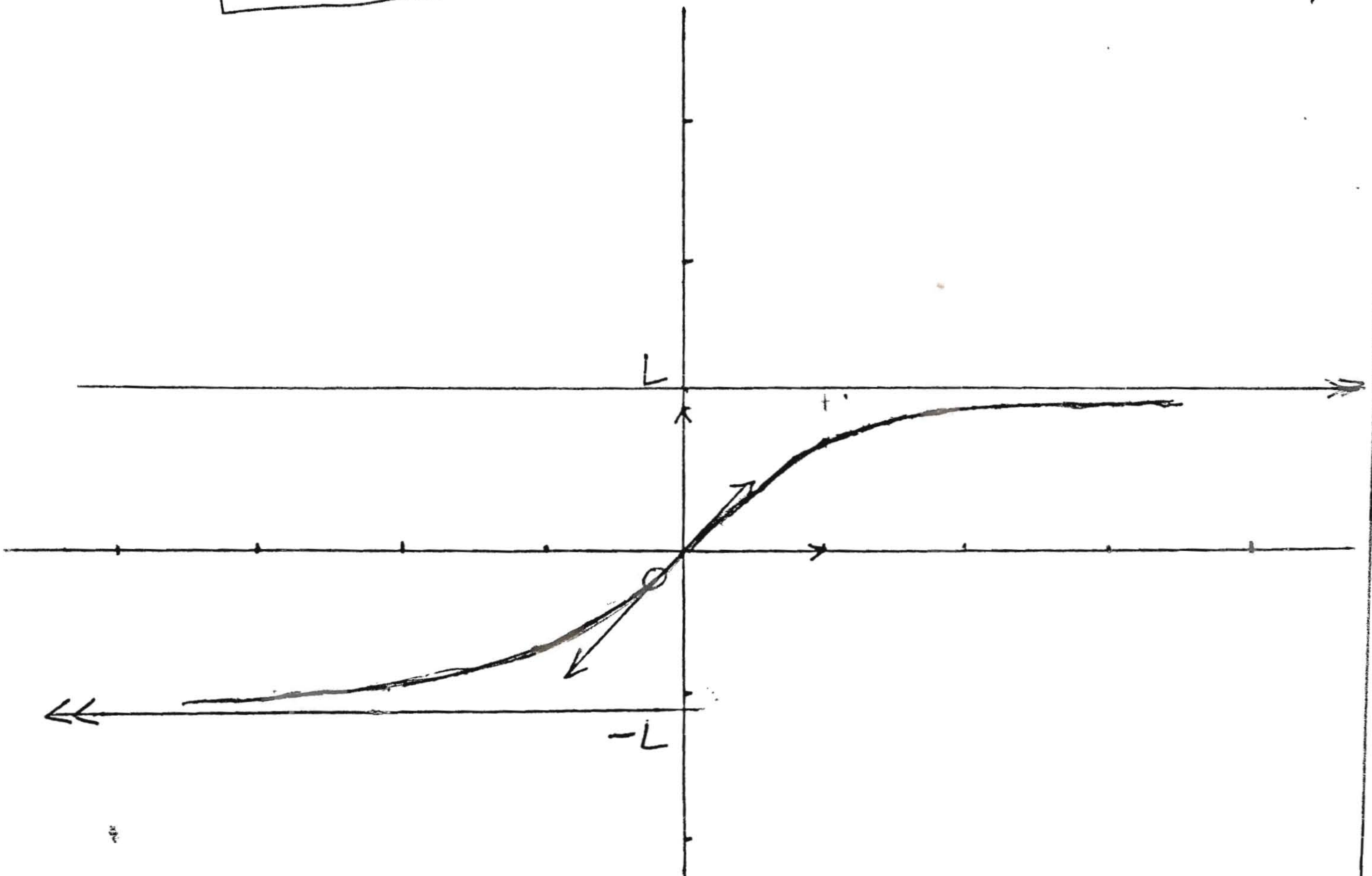
c. $(U_n)_n$ étant croissant et majorée, alors U_n est une suite convergente. Comme $U_n \leq I + \frac{1}{e}$ alors $L \leq I + \frac{1}{e}$ avec $L = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. 0,25

d. La fonction F a la même limite finie L que (U_n) lorsque x tend vers $+\infty$. 0,25

5- Tableau de variation de F

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	1 $\qquad$ $+$
$F(x)$	$0 \nearrow L$

avec $L \leq I + \frac{1}{e} \simeq 1{,}11$



0,50