

*rouge*

**Exercice 1 (5 points) (Suites numériques)**

On définit la suite  $(u_n)$  sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$

On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = u_n - \frac{1}{2}$

1. Calculer :  $u_1$ ;  $u_2$ ;  $u_1 - u_0$ ;  $u_2 - u_1$ ;  $\frac{u_1}{u_0}$  et  $\frac{u_2}{u_1}$ . La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ?

Géométrique ? Justifier votre réponse.

2. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique. Préciser la raison et le terme initial de cette suite.

3. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

4. On pose  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

Montrer que :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{3[1 - (-3)^{n+1}]}{8}$$

En déduire l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 2 (5 points) (Programmation linéaire)**

Le comité des fêtes d'une commune du Gabon organise un repas de 150 personnes. Il prévoit pour chaque personne 3 assiettes en carton, 2 verres et 4 serviettes en papier.

Le magasin BIDZY propose un lot comprenant 50 assiettes, 50 verres et 50 serviettes pour 10 000 f CFA.

Le magasin NZAL propose un lot comprenant 30 assiettes, 25 verres et 60 serviettes pour 8 000 f CFA.

On se propose de déterminer le nombre de lots  $x$  du magasin BIDZY et le nombre de lots  $y$  du magasin NZAL pour que l'achat des accessoires soit le plus économique.

1. Déterminer le système d'inéquations portant sur  $x$  et  $y$  traduisant les contraintes.

2. Déterminer graphiquement l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 5x + 3y \geq 45 \\ 2x + y \geq 12 \\ 5x + 6y \geq 60 \end{cases}$$

Unité graphique : 1cm sur chaque axe.

(Hachurer pour chaque inéquation les demi-plans non solutions).

3.a) Exprimer en fonction de  $x$  et  $y$  la dépense  $T$  occasionnée par l'achat de  $x$  lots du magasin BIDZY et  $y$  lots du magasin NZAL.

b) Tracer sur le même graphique la droite  $(D)$  correspondant à une dépense 136 000f CFA. Déterminer graphiquement les couples  $(x ; y)$  pour lesquels la dépense est de 136 000F CFA .

c) Déterminer graphiquement le couple  $(x_0 ; y_0)$  qui rend la dépense minimale. Calculer cette dépense.

### **Problème (10 points)**

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur. Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandés.

Pour une commande de  $x$  kilogrammes de fruit, le prix  $P(x)$  en milliers de francs CFA du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x + 300}{x + 100} \text{ pour } x \in [100; +\infty[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1,5 \text{ milliers de francs ; soit } 1\,500\text{F CFA le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer  $300 \times 1500 = 450\,000\text{F CFA}$  au fournisseur pour cette commande.

### **PARTIE A : (Étude du prix $P$ proposé par le fournisseur)**

1. Calculer  $P(100)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ .

2. Montrer que  $P'$  la fonction dérivée de  $P$  a pour expression :  $P'(x) = -\frac{200}{(x+100)^2}$  sur  $[100 ; +\infty [$ .

3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $P$  sur  $[100 ; +\infty [$ .

### **PARTIE B : (Étude de la somme $S$ à dépenser par le supermarché).**

On appelle  $S(x)$  la somme en milliers de francs CFA dépensée par le supermarché pour une commande de  $x$  kilogrammes de fruits (ces fruits sont vendus par le fournisseur au prix de  $P(x)$  milliers de francs par kilogramme).

Cette somme est donc égale à :  $S(x) = x P(x)$ , pour  $x \in [100 ; +\infty [$ .

1.a) Exprimer  $S(x)$  en fonction de  $x$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ .

2. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $[100 ; +\infty [$  :

$$S'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x + 100)^2}$$

3. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $[100 ; +\infty [$  :

$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x + 100}$$

4. En déduire une primitive  $T$  de  $S$  sur  $[100 ; +\infty [$ .

### **PARTIE C : (Étude de différentes situations)**

*Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*

1. Le magasin dispose d'un budget de 900 000F CFA (ou bien  $S = 900$  milliers de francs CFA) pour la commande de fruits. Préciser, au kilogramme près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.

2. La valeur moyenne  $M$  d'une fonction  $f$  définie et continue sur un intervalle  $[a ; b]$  est donnée par la formule  $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

Le supermarché estime acheter régulièrement entre 400 et 600 kilogrammes de fruits à ce fournisseur.

Déterminer la valeur moyenne de  $S$  sur  $[400 ; 600]$  et donner le résultat arrondi à l'unité.

**Corrigé et grille de correction**

*Ce document ne constitue pas un corrigé type à viser pédagogique destiné aux élèves. Il s'adresse aux harmonisateurs-correcteurs pour permettre une correction sur la base de critères discutés et adoptés lors de la réunion d'entente et d'harmonisation.*

**Exercice 1 : (suites numériques) (5 points)**

1. Calculons  $u_1$ ;  $u_2$ ;  $u_1 - u_0$ ;  $u_2 - u_1$ ;  $\frac{u_1}{u_0}$  et  $\frac{u_2}{u_1}$ .

On a :  $u_1 = -4$ ;  $u_2 = 14$ ;  $u_1 - u_0 = -6$ ;  $u_2 - u_1 = 18$ ;  $\frac{u_1}{u_0} = -2$  et  $\frac{u_2}{u_1} = -3,5$ .

Réponses correctes	0,25 × 6 points
--------------------	-----------------

- $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \Rightarrow (u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.
- $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow (u_n)$  n'est pas une suite géométrique.

Réponses correctes	0,25 × 2 points
Réponse plaquées	0,125 × 2 point

2. Montrons que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

On a :  $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc :  $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = -3u_n + 2 - \frac{1}{2} = -3u_n + \frac{3}{2} = -3\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = -3v_n$ .

$(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison -3 et de premier terme  $v_0 = \frac{3}{2}$ .

Réponses correctes	(0,5 + 0,25 + 0,25) point
--------------------	---------------------------

3. Expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  :  $v_n = \frac{-(-3)^{n+1}}{2}$

Réponse correcte	0,50 point
La formule bien posée $v_n = v_0 q^n$ , mais réponse fausse	0,25 point

Expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  :  $u_n = \frac{1}{2}(1 - (-3)^{n+1})$ .

Réponse correcte	0,50 point
La formule bien posée $u_n = v_n + \frac{1}{2}$ , mais réponse fausse	0,25 point

4. la somme  $v_0 + v_1 + \dots + v_n$  est celle des  $n + 1$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $-3$  et de premier  $v_0 = \frac{3}{2}$ , on a alors :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left( \frac{1 - (-3)^{n+1}}{1 - (-3)} \right) = \frac{3}{2} \times \left( \frac{1 - (-3)^{n+1}}{4} \right) = 3 \times \left( \frac{1 - (-3)^{n+1}}{8} \right).$$

Réponse correcte	<b>0, 50 point</b>
La formule bien posée $v_0 \times \left( \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$ , mais réponse fausse	<b>0, 25 point</b>

On a :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= \left( \frac{1}{2} + v_0 \right) + \left( \frac{1}{2} + v_1 \right) + \dots + \left( \frac{1}{2} + v_n \right).$$

$$= \frac{1}{2}(n + 1) + (v_0 + v_1 + \dots + v_n).$$

Donc :  $S_n = \frac{1}{2}(n + 1) + 3 \times \left( \frac{1 - (-3)^{n+1}}{8} \right)$

Réponse correcte	<b>0, 50 point</b>
Les calculs sont bien agencés mais résultat faux	<b>0, 25 point</b>

### Exercice 2 (Programmation linéaire) (5 points)

1.

- $x$  et  $y$  sont les nombres de lots, donc  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .
- On s'intéresse d'abord aux assiettes en carton, chaque personne devrait avoir 3 assiettes au moins.

Le magasin BIDZY propose 50 assiettes, donc en achetant  $x$  lots du magasin BIDZY,  $\frac{50x}{3}$  auront au moins 3 assiettes.

Le magasin NZAL propose 30 assiettes, donc en achetant  $y$  lots du magasin NZAL,  $\frac{30y}{3}$  auront au moins 3 assiettes.

Et puisqu'il a 150 invités (au moins), alors on a :  $\frac{50x}{3} + \frac{30y}{3} \geq 150$ .

Soit :  $5x + 3y \geq 45$ .

- Pour ce qui est des verres, on obtient l'inéquation :  $\frac{50x}{2} + \frac{25y}{2} \geq 150$ .

Soit :  $2x + y \geq 12$ .

- De même pour les serviettes, on a :  $\frac{50x}{4} + \frac{60y}{4} \geq 150$ .

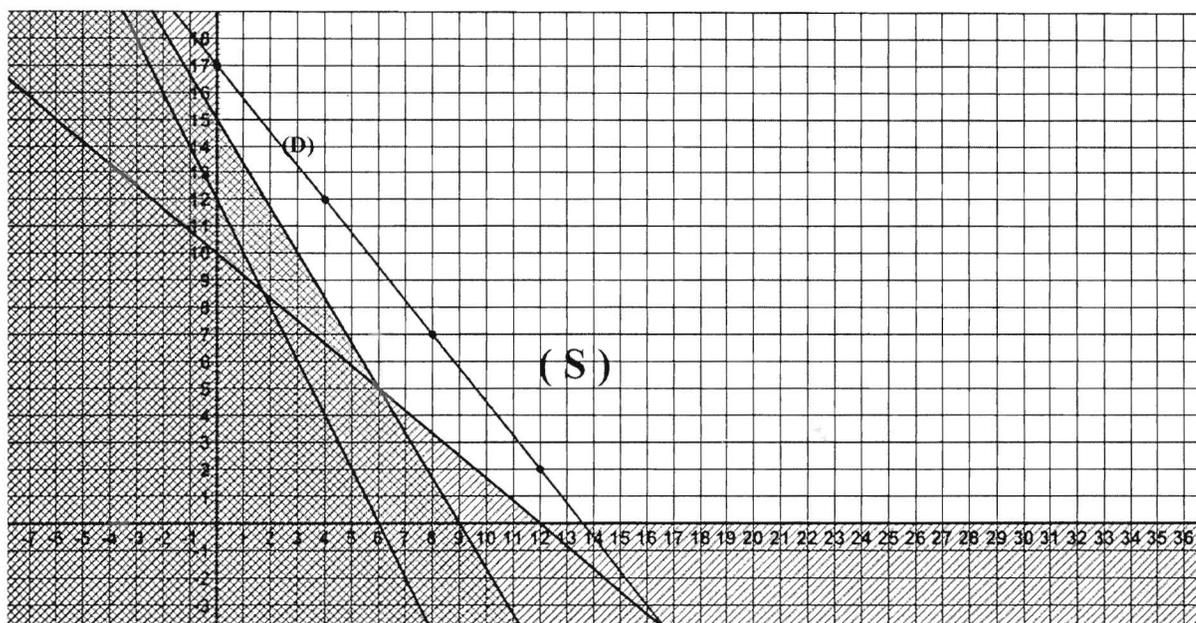
Soit :  $5x + 6y \geq 60$ .

Nous obtenons donc le système (S) :

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ 5x + 3y \geq 45 \\ 2x + y \geq 12 \\ 5x + 6y \geq 60 \end{cases}$$

Réponse correcte	<b>1, 50 points</b>
Le candidat trouve le système sans le simplifier	<b>1, 50 points</b>
Pour chaque puce trouvée	<b>0, 25 × 4 point</b>
Le candidat plaque le système sans justifier	<b>0, 25 points</b>

2. Résolution graphique du système (voir le graphique ci-dessous).



L'ensemble solution de ce système est la partie du plan non hachurée, frontières comprises.

<i>Réponse correcte</i>	<b>1,25 points</b>
<i>Représentation graphique correcte, sans préciser l'ensemble solution</i>	<b>1 point</b>
<i>Les droites sont bien représentées mais pas d'ensemble solution ou solution fausse.</i>	<b>0,25 × 3 point</b>

3.a) La dépense T est donnée par la relation :  $T = 10\,000x + 8\,000y$ .

<i>Réponse correcte</i>	<b>0,5 point</b>
-------------------------	------------------

b) On a (D) :  $136\,000 = 10\,000x + 8\,000y$

Soit (D) :  $5x + 4y = 68$ .

Tracer de la droite (D) voir graphique.

<i>Tracer de la droite (D) correcte</i>	<b>0,5 point</b>
<i>Détermination d'une équation de (D) correcte, mais non représentée</i>	<b>0,25 point</b>

Les couples pour lesquels la dépense est égale à 136 000F sont : (0; 17); (4; 12); (8; 7); (12; 2).

<i>Réponse correcte</i>	<b>0,5 point</b>
<i>3 couples solution</i>	<b>0,5 point</b>
<i>1 ou 2 couples solutions</i>	<b>0,25 point</b>

c) le couple rendant la dépense minimale est obtenue en traçant la parallèle à (D) dans la zone solution, le dernier couple dans cette zone appartenant à la parallèle à (D) est celui qui minimise les dépenses.

On obtient le couple (6; 5).

<i>Réponse correcte avec ou sans justification</i>	<b>0,25 point</b>
--	-------------------

La dépense correspondante est :  $T=100\ 000\text{F CFA}$ .

Réponse correcte	0,5 point
Bonne application numérique, mais avec un couple non solution	0,25 point

**Problème (10 points)**

**Partie A (Etude du prix  $P$  proposé par le fournisseur) (3,5 points)**

1.  $P(100) = 200$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ .

Réponse correcte	0,5 × 2 point
------------------	---------------

2.  $P$  est une fonction homographe, donc dérivable sur son ensemble de définition  $\mathbb{R} \setminus \{-100\}$ , en particulier sur  $[100; +\infty[$  et sa fonction dérivée est :

$$P'(x) = \frac{1(x+100) - 1(x+300)}{(x+100)^2} = \frac{-200}{(x+100)^2}$$

Réponse correcte	1 point
Formule de la dérivée du quotient bien posée, démarche cohérente et résultat faux.	0,5 point

3. Tableau de variations de la fonction  $P$ .

Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[100; +\infty[$ ,  $(x + 100)^2 > 0$ .

Donc le signe de  $P'(x)$  est celui du numérateur qui est négatif. On a donc le tableau suivant :

$x$	100	$+\infty$
$P'(x)$	-	
$P(x)$	100	1

Réponse correcte	1,5 points
Signe de $P'(x)$ juste sans dresser le tableau de variation	0,5 point
Variations juste sans dresser le tableau de variation	0,5 point
Tableau de variation juste sans mentionner les limites aux bornes	1 point

**Partie B (Etude de la somme  $S$  à dépenser par le supermarché) (4 points)**

1.a) Expression de  $S(x)$  en fonction de  $x$ :  $S(x) = \frac{x(x+100)}{x+100}$

Réponse correcte	0,5 point
------------------	-----------

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 300x}{x + 100} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

Réponse correcte	0,5 point
------------------	-----------

Réponse plaquée	0,25 point
-----------------	------------

2.S est une fonction rationnelle définie sur  $[100; +\infty[$ , donc dérivable sur le même intervalle, et sa fonction dérivée est :

$$S'(x) = \frac{(2x + 300)(x + 100) - 1(x^2 + 300x)}{(x + 100)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 200x + 300x + 30\,000 - x^2 - 300x}{(x + 100)^2}$$

$$S'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x + 100)^2}$$

Réponse correcte	1 point
Formule de la dérivée du quotient bien posée, démarche cohérente et résultat faux.	0,5 point

3. Par division euclidienne de  $x^2 + 300x$  par  $x + 100$ , on obtient le résultat.

NB : Le candidats peut également réduire au même dénominateur l'expression :

$$x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x+100} \text{ et reconnaître } S(x).$$

Réponse correcte	1 point
Démarche faisant allusion à une réduction au même dénominateur, principe d'égalité non respecté	0,5 point

4. Une primitive  $T$  de  $S$  sur  $[100; +\infty[$  est :  $T(x) = \frac{1}{2}x^2 + 200x - 20000 \ln(x + 100)$ .

Réponse correcte	1 point
Les primitives de $x \mapsto x$ et $x \mapsto 100$ sont justes	0,5 point

### Partie C (Etude de différentes situations)

1. Poids maximum de fruits pour un budget de 900 000f CFA.

$$\text{Donc } :S(x) = 900 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 300x}{x + 100} = 900 \Leftrightarrow x^2 - 600x - 90\,000 = 0$$

$\Delta = 720\,000 > 0$ , l'équation admet deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{600 - 600\sqrt{2}}{2} \notin [100; +\infty[;$$

$$x_2 = \frac{600 + 600\sqrt{2}}{2} = \frac{600(1 + \sqrt{2})}{2} \approx 724 \in [100; +\infty[$$

Le Poids maximum de fruits pour un budget de 900 000f CFA est de 724 kg
---

Réponse correcte	1 point
Le candidat montre que « $S = 900 \Leftrightarrow x^2 - 600x - 90\,000 = 0$ », et trouve les deux solutions	0,75 point
Le candidat montre que « $S = 900 \Leftrightarrow x^2 - 600x - 90\,000 = 0$ », mais ne résout pas l'équation, ou résultat faux.	0,25 point

4. Valeur moyenne de la somme à dépenser.

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{600 - 400} \int_{400}^{600} S(x) dx \\
&= \frac{1}{200} [T(x)]_{400}^{600} \\
&= \frac{140\,000 - 20\,000 \ln\left(\frac{7}{5}\right)}{200} \\
M &= 700 - 100 \ln\left(\frac{7}{5}\right)
\end{aligned}$$

$$M \approx 666$$

La dépense moyenne du supermarché pour un achat entre 400 et 600 kilogrammes de fruits est 666 000F CFA.

<i>Réponse correcte</i>	<b>1,5 points</b>
<i>Le candidat trouve le résultat exact, avec d'arrondi à l'unité sans interpréter le résultat.</i>	<b>1,25 point</b>
<i>Le candidat trouve le résultat exact, mais pas d'arrondi à l'unité</i>	<b>1 point</b>
<i>Le candidat utilise la primitive T mais résultat faux</i>	<b>0,5 point</b>