REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2012- MATHEMATIQUES
Série : D
Temps : 4 heures
Coef. : 4

Exercice 1 (5 points)

Pour lancer un nouveau produit P sur le marché, une société de la place effectue un sondage auprès des éventuels clients. Dans le tableau ci-dessous :
x représente le prix de vente unitaire du produit P exprimé en centaines de francs CFA ;
y représente la quantité du produit P demandée en millier.

Prix de vente unitaire x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25

Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques :
1 cm pour une centaine de francs CFA sur l'axe des abscisses;
2 cm pour un millier sur l'axe des ordonnées.

1. a) Représenter graphiquement le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$.
   b) La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement affine ? Justifier la réponse.
2. On effectue le changement de variable suivant : $w_i = lny_i$ où ln désigne la fonction logarithme népérien :
   a) Recopier et compléter le tableau suivant :
   (les valeurs de w_i seront arrondies à 10^{-4} près)

x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
$w_i = lny_i$						

   b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i; w_i)$.
   c) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de w en x.
   d) En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $y = \alpha.\beta^x$.
   Donner les valeurs approchées de α et β à 10^{-3} près.
   Déterminer une estimation de la demande y en fonction du prix x.
   e) En supposant que cette tendance est maintenue, déterminer le nombre d'unités de produit P que les consommateurs sont près à acheter si le prix de vente unitaire est fixé à 15 centaines de francs CFA.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $f(z) = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. On désigne par K le point d'affixe $f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculer les coordonnées de K.
2. Soit α un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = \frac{2}{3}cos\alpha$.
3. a) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') : $z^4 - 2(cos\alpha)z^2 + 1 = 0$.
   (On donnera les solutions sous forme exponentielle).
   b) Vérifier que les solutions de (E') sont deux à deux conjuguées.
   c) Décomposer le polynôme à variable réelle x défini par :$P(x) = x^4 - 2(cos \propto)x^2 + 1$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

4. On considère l'application h du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $2\left(z-\frac{1}{3}\right)=(1+i)\left(z'-\frac{1}{3}\right)$.
   a) Démontrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
   b) Démontrer que h est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Problème (10 points)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle I=$]0;+\infty[$ par :
$f(x)=\frac{1}{x^2}(x+lnx)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit h la fonction définie sur I par : $h(x)=-x+1-2lnx$.

1. Calculer les limites de h aux bornes de I.
2. Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
3. Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $h(x)$ pour tout x élément de I.

Partie B : Etude d'une fonction.

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de I.
   b) Montrer que : $f'(x)=\frac{h(x)}{x^3}$
   c) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.
2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur I et que l'on a : $0{,}5<\alpha<0{,}6$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle [1 ; +∞ [.
   a) Démontrer que g réalise une bijection de [1 ; +∞ [sur un intervalle J à préciser. On désigne par g^{-1} l'application réciproque de g.
   b) Résoudre dans J l'équation $g^{-1}(x)=e$.
   c) Calculer $(g^{-1})'(e^{-2}+e^{-1})$
4. Construire la courbe (C) et la courbe de (Γ) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie C : Mouvement d'un point

Dans le repère ci-dessus, un point mobile M a pour coordonnées:
$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t}+te^{-2t} \end{cases}$; $t\in[0;+\infty[$

1. Démontrer que la trajectoire de M est une partie de (C) à préciser.
2. Déterminer les composantes du vecteur vitesse de M à l'instant t.
3. Représenter ce vecteur vitesse à l'instant $t=0$

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques ; série D ; session de juillet 2012

Exercice 1

1. Voir annexe
2.

a) Tableau

x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
$w_i = \ln y_i$	1,833	1,589	1,321	1,012	0,875	0,811

b) $r = \dfrac{\operatorname{cov}(x;w)}{\sqrt{V(x)\times V(w)}}$; $r \simeq -0{,}942$

c) La droite de régression de w en x a pour équation $w = ax + b$.

$a = \dfrac{\operatorname{cov}(x;w)}{V(x)}$ $b = \overline{w} - a\overline{x}$

-0,141 $a \simeq -141$ $b \simeq 2{,}077$

$w = -0{,}141x + 2{,}077$

d) En posant : $w = \ln y$

On déduit : $-0{,}141x + 2{,}077 = \ln y$

Puis : $y = e^{-0{,}141x+2{,}077}$

D'où : $y = e^{2{,}077} \times e^{-0{,}141x}$

Soit : $\alpha \simeq 7{,}980$; $\beta \simeq 0{,}868$

Une estimation de la demande y en fonction du prix x est : $y \simeq 7{,}980 \times 0{,}868^x$

e) Si la tendance est ainsi maintenue, si le prix de vente unitaire est fixé à 15 centaines de francs CFA, alors : $y \simeq 7{,}980 \times 0{,}868^{15}$; soit $y \simeq 0{,}955$

Ainsi, 955 produits P peuvent être achetés si le prix de vente unitaire est fixé à 15 centaines de francs CFA.

Exercice 2 :

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ $f(z) = \dfrac{1}{3}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

1. $f\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}\right)$

$f\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$; $K\left(\dfrac{1}{3};0\right)$

2. $(E) : f(z) = \dfrac{2}{3}\cos\alpha \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{2}{3}\cos\alpha$

$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 2(\cos\alpha)z$

$\Leftrightarrow z^2 - 2(\cos\alpha)z + 1 = 0$

$\Delta = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4\left(\cos^2\alpha - 1\right) = (2i\sin\alpha)^2$

(E) admet deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \cos\alpha - i|\sin\alpha|$; $z_2 = \cos\alpha + i|\sin\alpha|$

$$S = \left\{e^{i\alpha}; e^{-i\alpha}\right\}$$

3. O ;ùoù ;^

a) En posant $Z = z^2$, $(E') \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - 2(\cos\alpha)Z + 1 = 0 \\ Z = z^2 \end{cases}$

(E') admet quatre solutions : $S' = \left\{ e^{-i\frac{\alpha}{2}}; -e^{-i\frac{\alpha}{2}}; e^{i\frac{\alpha}{2}}; -e^{i\frac{\alpha}{2}} \right\}$

b) $e^{-i\frac{\alpha}{2}} = \overline{e^{i\frac{\alpha}{2}}}$; $-e^{-i\frac{\alpha}{2}} = \overline{-e^{i\frac{\alpha}{2}}}$

c) $P(x) = x^4 - 2(\cos\alpha)x^2 + 1$

De la résolution de (E'), il vient que :

$$z^4 - 2(\cos\alpha)z^2 + 1 = \left(z - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(z - e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(z + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(z + e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$z^4 - 2(\cos\alpha)z^2 + 1 = \left(z^2 - 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)z + 1\right)\left(z^2 + 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)z + 1\right)$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 - 2(\cos\alpha)x^2 + 1 = \left(x^2 - 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x + 1\right)\left(x^2 + 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x + 1\right)$

4. $2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1-i)\left(z' - \frac{1}{3}\right)$

a) On déduit : $z' - \frac{1}{3} = \frac{2}{1+i}\left(z - \frac{1}{3}\right)$

$$z' - \frac{1}{3} = (1-i)\left(z - \frac{1}{3}\right)$$

h est alors une similitude directe de centre $K\left(\frac{1}{3};0\right)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b) h est la composée de la rotation r de centre K, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre K, de rapport $\sqrt{2}$.

Problème

Soit f une fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$ et (C) sa courbe

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

h est la fonction définie sur I par : $h(x) = -x + 1 - 2\ln x$

1. Limites de h aux bornes de I :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} (-x+1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (-2\ln x) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[-1 + \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right]$$

D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

2. Sens de variations de h et tableau de variation de h

$x \mapsto -x+1$ et $x \mapsto -2\ln x$ sont dérivables sur I. h est donc dérivable sur I.

$\forall x \in I, h'(x) = -1 - \frac{2}{x} = -\left(1 + \frac{2}{x}\right)$.

$\forall x \in I, h'(x) < 0$. h est strictement décroissante sur I.

Tableau de variation de h.

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. $h(1) = -1 + 1 - 2\ln 1$; $h(1) = 0$

h est strictement décroissante, $h(1) = 0$.

Alors, $\forall x \in]0;1], h(x) \geq 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[, h(x) \leq 0$.

Partie B : Etude d'une fonction

1.

a) Limites de f aux bornes de I

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (x + \ln x) = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$$

$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto x + \ln x$ sont dérivables sur I. f est donc dérivable sur I

$\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{-x+1-2\ln x}{x^3}$

Or : $\forall x \in I,\ h(x) = -x+1-2\ln x$.

D'où : $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^3}$.

c) <u>Sens de variation de f et tableau de variation complet</u>

$\forall x \in I,\ x^3 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est alors celui de $h(x)$ sur I.

Ainsi, $\forall x \in]0;1],\ f'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[,\ f'(x) \leq 0$. f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$

$f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. f est continue, strictement croissante sur $]0;1]$. Elle réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]-\infty;1[$. 0 admet alors un unique antécédent dans $]0;1[$ par f. $\forall x \in [1;+\infty[,\ f(x) > 0$. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur I.

$$\left.\begin{array}{r} f(0,5) \simeq -0,77 \\ f(0,6) \simeq 0,24 \end{array}\right\} f(0,5) \times f(0,6) < 0$$

D'où : $0,5 < \alpha < 0,6$

3. Soit g la restriction de f sur $[1;+\infty[$.

a) $[1;+\infty[\subset I$ et $\forall x \in [1;+\infty[,\ g(x) = f(x)$.

f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]0;1]$. Alors g réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]0;1]$

b) On sait que $g(e) = f(e) = \dfrac{1}{e^2}(e + \ln e)$

$$g(e) = \frac{e+1}{e^2}$$

Alors, $g^{-1}\left(\dfrac{e+1}{e^2}\right) = e$

Donc l'équation $g^{-1}(x) = e$ a pour ensemble solution : $S = \left\{\dfrac{e+1}{e^2}\right\}$

c) $\left(g^{-1}\right)'\left(e^{-2}+e^{-1}\right)=\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{e+1}{e^2}\right)$

$$\left(g^{-1}\right)'\left(e^{-2}+e^{-1}\right)=\frac{1}{g'(e)}=\frac{1}{f'(e)}$$

$$\left(g^{-1}\right)'\left(e^{-2}+e^{-1}\right)=-\frac{e^3}{1+e}$$

4. Voir Annexe

Partie C : Mouvement d'un point

1. $x=e^t \quad \Leftrightarrow \quad t=\ln x$

En remplaçant t par $\ln x$ dans y, on obtient : $y=\frac{1}{x^2}(x+\ln x)$

Comme $t\in[0;+\infty[$, alors $e^t\in[1;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad x\in[1;+\infty[$

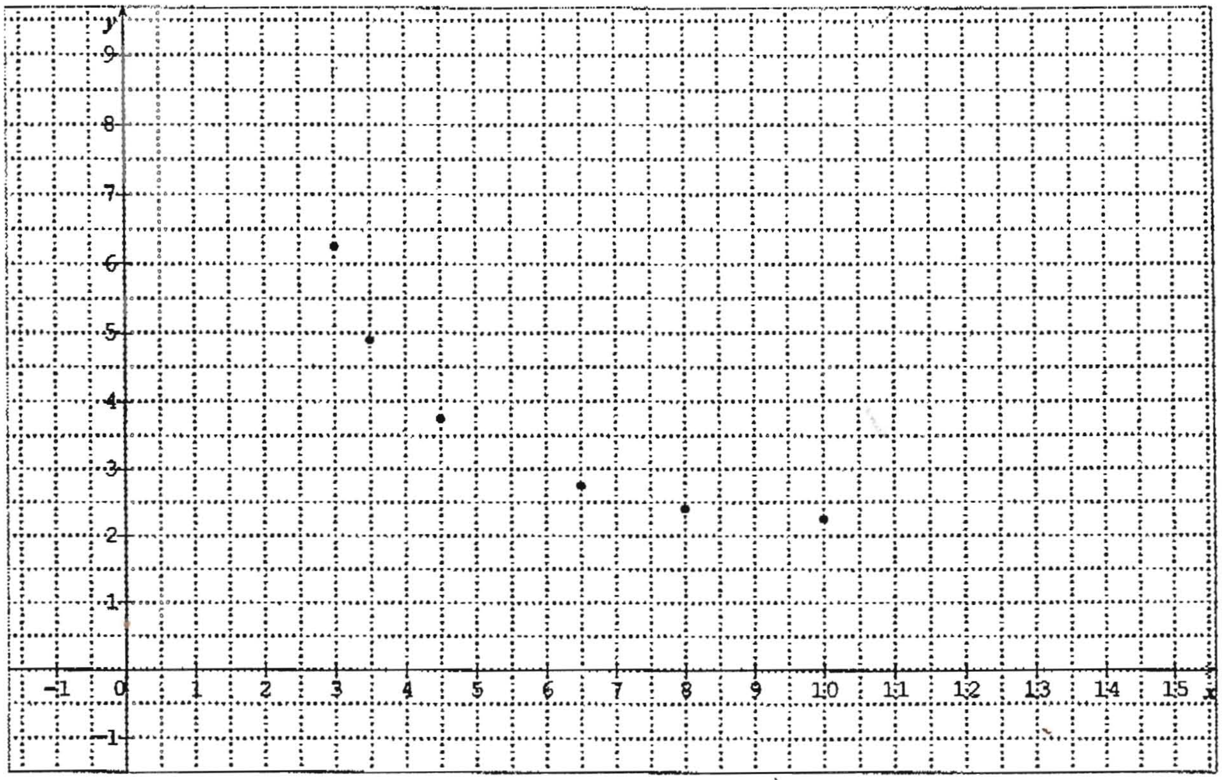
D'où la trajectoire de M est l'ensemble des points de (C) d'abscisses x tels que $x\geq 1$.

2. Composantes du vecteur vitesse à l'instant t :

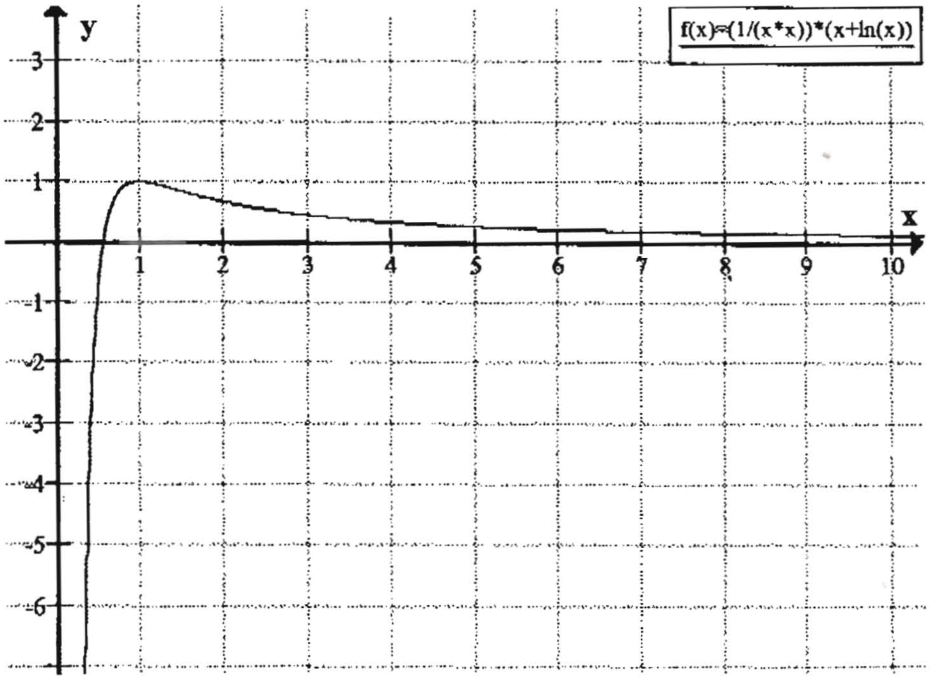
$$V(t)=\begin{cases}x'(t)=e^t\\ y'(t)=-e^{-t}+e^{-2t}-2te^{-2t}\end{cases} \qquad t\in[0;+\infty[$$

3. A l'instant $t=0$

$$V(0)=\begin{cases}x'(0)=e^0\\ y'(0)=-e^0+e^0\end{cases} \quad ; \quad V(0)=\begin{cases}x'(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}$$



Exercice 1 ; 1. Nuage de points



Problème 1 ; Partie B ; 4.