REPUBLIQUE GABONAISE **2008 – MATHEMATIQUES**

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

Série : D
Durée : 4 heures
Coef. : 4

EXERCICE 1 (4 points)

Pour un oral de mathématiques, un examinateur a une urne contenant dix plaquettes indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 10.Chaque plaquette numérotée renvoie à un exercice portant sur une partie du programme.

Les plaquettes numérotées de 1 à 5 renvoient chacune à un exercice sur l'étude de fonction, celles de 6 à 8 correspondent à des exercices de probabilités et les numéros 9 et 10 correspondent à des exercices sur les nombres complexes.
Chaque candidat doit tirer simultanément et au hasard deux plaquettes.
Un candidat qui n'a pas révisé toutes les parties du programme sait que, pour réussir à l'oral, il doit tirer au moins un exercice sur l'étude d'une fonction.

1- Montrer que la probabilité que ce candidat réussisse à l'oral de mathématiques est égale à $\frac{7}{9}$.

2- L'examinateur a interrogé dix candidats n'ayant pas révisé toutes les parties du programme.
Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux réussissent à l'oral de mathématiques ?

3- L'oral de mathématiques est en fait l'une des épreuves d'admissibilité à un concours d'entrée dans une grande école.
De plus on sait que :

- Si un candidat n'ayant pas révisé toutes les parties du programme réussit à l'oral de mathématiques, la probabilité qu'il réussisse au concours est égale à $\frac{4}{7}$. Par contre si un tel candidat échoue à l'oral de mathématiques, il a encore 30% de chance de réussir au concours.

On considère pour un candidat n'ayant pas révisé toutes les parties du programme les événements suivants :
M : « Le candidat réussit à l'oral de mathématiques. »
R : « Le candidat réussit au concours. »

a) Calculer la probabilité que le candidat réussisse à l'oral de mathématiques et au concours.
b) Calculer la probabilité que le candidat réussisse au concours.
c) Le candidat a réussi au concours. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas réussi à l'oral de mathématiques?

<u>N.B :</u> *On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible et on pourra se servir d'un arbre pondéré..*

EXERCICE 2: **(4 points)**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1cm)

1) a). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(-2+2i)a-(1+\sqrt{3})-i(\sqrt{3}-1)=0$ où l'inconnue est a.

b) En déduire l'écriture complexe de la rotation r de centre O définie du plan P dans lui-même qui transforme le point $A(-2;2)$ en le point $B(1+\sqrt{3};-1+\sqrt{3})$.

c) Vérifier qu'une mesure de l'angle de la rotation r est $\frac{2\pi}{3}$

d) Préciser en justifiant, la nature du triangle AOB.

2) On se propose de construire avec précision les points $C(-\sqrt{3}-1\ ;\ \sqrt{3}-1)$ et $D(1-4\sqrt{3}\ ;\ -4-\sqrt{3})$ d'images respectives par la rotation r les points E et F..

a) Calculer les coordonnées des points E et F

b) Sur une même figure, placer les points E et F, puis les points C et D en justifiant rigoureusement la construction.

3) On désigne par M' l'image d'un point M par la rotation r. Quel est l'ensemble décrit par le point M' lorsque le point M parcourt le cercle (Γ) de centre A et de rayon $3\sqrt{2}$? Justifier la réponse.

PROBLEME : **(12 points)**

PARTIE A :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur IR par :

$f(x)=e^{-x}+x-1$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C) à $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

d) Justifier que f est dérivable sur IR et calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

e) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

2) a) Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet deux solutions α et β $(\alpha<\beta)$ sur IR.

Page 2 sur 3

b) Vérifier les inégalités suivantes :

$$-1{,}51<\alpha<-1{,}50 \quad \text{et} \quad 2{,}94<\beta<2{,}95.$$

3) Tracer (C), (D) dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$.

4) a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ en cm^2 du domaine limité par la droite (D), la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ (λ est un réel strictement positif).

b) Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

PARTIE B :

On note g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

1) a) Démontrer que g est une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle **J** à préciser.

b) Donner l'ensemble sur lequel la fonction réciproque g^{-1} est dérivable. Justifier votre réponse.

c) Calculer $g(1)$, $g'(1)$ puis en déduire $(g^{-1})'(e^{-1})$.

2) Tracer la courbe (Γ) représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$.

PARTIE C :

Pour tout entier n appartenant à IN, on désigne par (E_n) le domaine limité par la droite (D), la courbe (C) et les droites d'équation $x=n$ et $x=n+1$.

1) v_n représente en cm^2 l'aire du domaine (E_n).

a) Démontrer que $v_n=\dfrac{e-1}{e^{n+1}}$.

b) Démontrer que la suite des réels (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c) Calculer la somme $S_n=v_0+v_1+......+v_n$.

d) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2) a) Démontrer qu'en tout point A d'abscisse a de la courbe (C), il existe une tangente à (C) dont on déterminera une équation en fonction de a.

b) Démontrer que cette tangente coupe l'asymptote (D) en un point B dont on déterminera l'abscisse.

c) On désigne par A' et par B' les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des abscisses. Démontrer que $A'B'$ est un nombre constant.

Pendant la résolution des exercices et problème, tout résultat non établi par le candidat peut être admis pour la suite.