10 copies

REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2007– MATHEMATIQUES

Série : D

Durée : 4 heures

Coefficient. : 4

EXERCICE 1: (4 POINTS)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ On considère les plans(P) et (Q) d'équations respectives : $2x+y-z=0$ et $x+y+z-5=0$.

1-a) Déterminer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs normaux respectivement à (P) et à (Q).

b) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D).

2- On considère les points $I(-5\ ,\ 10\ ,\ 0)$; $J(-3\ ,\ 7\ ,\ 1)$ et $K(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$.

a) Déterminer celui de ces trois points qui n'appartient pas à (D). Justifier votre réponse.

b)Donner alors une équation paramétrique de la droite (D).

2- On donne les points $A(-1\ ,\ 4\ ,\ 2)$; $B(1\ ,\ 1\ ,\ 0)$ et $C(-1\ ,\ 1\ ,\ \text{i})$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Les points A, B et C déterminer-ils un plan ? Justifier votre réponse.

c) Si A, B et C déterminent un plan, alors donner une équation cartésienne de ce plan,

d) Déterminer l'intersection des trois plans (P) ; (Q) et (ABC).

EXERCICE 2: (5 POINTS)

1- a) Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$.

b) En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation : $z^2-i=0$.

2) On pose $P(z)=z^3+z^2-iz-i$ où z est un nombre complexe.

a) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une racine réelle α que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : $2\ cm$).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_B=\frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)\quad \text{et}\quad z_C=-1.$$

a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et z_B.

b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.

4) Soit D le symétrique de A par rapport à l'axe des réels.

a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique

b) Démontrer que: $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

En déduire la nature du triangle ACD .

5) Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O.

On considère la similitude directe s qui transforme E en A et F en B.

a) Déterminer l'écriture complexe de s et ses éléments caractéristiques.

b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon 1.

Déterminer l'image (C') de (C) par s.

PROBLEME : **(11 POINTS)**

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$: par $g(x)=\sin x+\cos x$.

1-a) Etudiez la dérivabilité de g sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ puis calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de la fonction de g.

b) Résoudre l'équation $g'(x)=0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2- On admet que $\sin x \geq \cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin x \leq \cos x$ $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

a) Justifier que pour tout x élément de $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$: $\sin x < \cos x$

b) En déduire le signe de g' sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

3- Déterminer le sens de variation de g sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, puis dresser son tableau complet de variations.

4- Calculer l'image de $-\frac{\pi}{4}$ par g ; et en déduire le signe de g sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

PARTIE B : Etude d'une fonction f et calcul d'aire.

On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=e^{-x}\cos x$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}\ ;\vec{i},\vec{j})$.

Unités graphiques :

- 5 cm pour 1 unité en ordonnée
- 8 cm pour $\frac{\pi}{2}$ en abscisses.

1-a). Etudier la dérivabilité de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, puis vérifier que $f'(x)=-e^{-x}g(x)$.

b- Etudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau complet de variations.

2-a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$					

b) Ecrire une équation de chacune des droites (T_1) et (T_2) tangentes à (C) respectivement en ses points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$.

c) Construire avec soin les droites (T_1), (T_2) et la courbe (C) dans le repère $(\text{O}\ ;\vec{i},\vec{j})$.

3- Soit la fonction h définie et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ telle que : $h(x) = e^{-x}\sin x$.

a) Calculer $h'(x)$ ou h' désigne la dérivée de la fonction h.

b) Soit $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx$ et $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx$. Calculer $I + J$ et $I - J$.

(On rappelle que $f'(x) = -e^{-x}g(x)$ pour tout x élément de $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$).

c) En déduire I et J. Donner, en unités d'aire, l'aire du domaine du plan défini par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$

<u>PARTIE C :</u> Approximation de la solution d'une équation

1- Soit φ la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = f(x) - x$

a) Etudier la dérivabilité de φ sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ ou φ' désigne la dérivée de la fonction φ, puis en déduire le sens de variation de φ en exploitant le signe de f' sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

c) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

d) On pose $\beta = f(1) = e^{-1}\cos 1$. En exploitant le sens de variations de f sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ démontrer que : $0 < \beta < \alpha < 1$.

2- Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$. On admet que pour tout entier naturel n : $\beta \leq U_n \leq \alpha < 1$.

On pose $p = \left|f'(\beta)\right|$.

a) Démontrer que f est deux fois dérivable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, puis calculer $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.

b) Vérifier que pour tout x élément de $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$: $f''(x) > 0$.

c) En déduire que pour tout x élément de $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(0) < f'(x) \leq f'(\frac{\pi}{2}) < 0$ et que $\left|f'(x)\right| \leq -f'(0)$.

d) Vérifier que $\left|f'(\beta)\right| < 1$.

e) Démontrer que pour tout $x \in [\beta\ ;\ 1]$, on a $\left|f'(x)\right| \leq p < 1$.

3-..a) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq p|U_n - \alpha|$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq p^n |U_0 - \alpha|$

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Pendant la résolution des exercices et problème, tout résultat non établi par le candidat peut être admis pour la suite.