MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

REPUBLIQUE GABONAISE
Union– Travail– Justice

SESSION 2006– MATHEMATIQUES–1
Série : D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1 (5,5 points)

1°) a) Calculer $(3 - 2i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 4z - 1 + 12i = 0$$

2°) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1 + 2i$, $b = 5 - 2i$ et $c = 3 + 2i$. Faire une figure.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application S_1 dans le plan complexe $\mathscr{P}$ qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1-i)z - 2 - i.$$

Déterminer d l'affixe du point D qui a pour image par S_1 le point C. Placer le point D.

b) Donner l'écriture complexe de la similitude directe S_2 du plan $\mathscr{P}$, de centre le point B, d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. déterminer g l'affixe de G image du point C par S_2. Placer le point G.

c) Montrer que $S_2 \circ S_1$ a pour écriture complexe : $z' = -iz + 2 + 2i$. On désigne par F le milieu du segment [AB]. Déterminer f l'affixe du point F. Quelle est l'image du point D par $S_2 \circ S_1$? Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $S_2 \circ S_1$. En déduire la nature du triangle FGD.

Exercice 2 (4,5 points)

Un test de dépistage du sida, qui peut être soit positif, soit négatif, donne les résultats Suivants :

- Chez les individus atteints, 98% des tests sont positifs.
- Chez les individus sains, 99% des tests sont négatifs.

Pour un individu pris au hasard dans la population ciblée, on désigne par A et T les événements suivants :

- A : " l'individu est atteint par le virus ".
- T : " le test est positif ".

1°) On suppose que cette maladie touche 5% de la population ciblée.

a) Illustrer la situation par un arbre pondéré.

b) Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard ait un test positif ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un individu dont le test est positif soit atteint par le virus ?

2°) On désigne par x la valeur décimale du pourcentage d'individus malades dans la population ciblée par le test.

a) Montrer que la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit atteint par le virus est dans ce cas : $p(x) = \dfrac{98x}{97x+1}$.

b) Etudier les variations de cette fonction sur son intervalle de définition $[0\,;\,1]$. En donner une représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé où l'unité graphique est 5 cm.

Problème (10 points)

Partie A : (*Equation différentielle. Recherche de primitives*). **(3 points)**

On considère l'équation différentielle : $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$. (E)

1°) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$, est solution de (E).

2°) On pose : $f = g + h$. Montrer que f est une solution générale de (E), si et seulement si h est une solution de l'équation différentielle : $y' + y = 0$ (E′).

3°) Résoudre (E′) puis en déduire les solutions générales de (E).

4°) a) Trouver les réels a et b tels que pour tout x réel on ait :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{ae^x}{1+e^x} + b\,.$$

b) En déduire sur $\mathbb{R}$ une primitive U de la fonction u telle que : $u(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

c) En remarquant que $g(x) = \dfrac{1}{1+e^x} - g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, trouver alors une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B (*Etude de g et d'une fonction auxiliaire φ*)**(2,25 points)**

On pose : $\varphi(x) = e^x g'(x)$.

1°) Vérifier que : $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

2°) Calculer la limite de φ en $-\infty$.

3°) Etablir que φ est strictement décroissante puis en déduire son signe.

4°) Déterminer alors le signe de $g'(x)$ ainsi que le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Partie C (*Représentations de courbes et calcul d'intégrales*) **(4,75 points)**

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de φ *et* Γ celle de g.

1°) Etudier la limite de φ en $+\infty$.

2°) Calculer la limite de $\varphi(x) - 1 + x$ en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

3°) Dresser le tableau de variation de la fonction φ.

4°) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$, dresser ensuite son tableau de variation.

5°) Tracer $\mathscr{C}$ et Γ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

6°) Soit α un réel positif. Calculer l'intégrale : $I(\alpha) = \int_0^\alpha g(x)dx$. Que représente $I(\alpha)$?

7°) Etudier la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

+

MATHEMATIQUES– CORRIGE
SESSION 2006–SERIE D

5,75

Exercice 1 (5,5 points)

1°) a)	1°) b)	2°) a)	2°)b)	2°)c)	Total
0,25	1,25	1	1	2	5,5

1°) a) **Calcul de :** $(3-2i)^2 = 5-12i$ — 0,25

b) **Résolution de $z^2-4z-1+12i=0$**

discriminant réduit est $5-12i=(3-2i)^2$ les solutions sont : 0,5 + 0,5

$z_1 = 5-2i;\quad z_2 = -1+2i$ — 1

2°) **Représentation des points A, B,C, D, F et G** — 0,25

2°) a) **Nature et éléments caractéristiques de S_1**

Ecriture complexe donné est $z' = (1-i)z-2-i$

$(1-i) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ l'affixe du point invariant est $Z_0 = -1+2i = a$

S_1 est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ — 0,75 1

Affixe du point D ; on sait que $S_1(D) = C$ donc $d = 1+4i$. — 0,25 0,75

Représentation de D.

b) **détermination de l'écriture complexe de S_2**

$z' = az+b$ avec $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}(1-i)$ et B est point fixe d'où : — 0,75

$z' = \dfrac{1}{2}(1-i)z + \dfrac{1}{2}(7+3i)$

Affixe du point G : on sait que $S_2(C) = G$ donc $g = 6+i$ — 0,25

Placement de G.

c) **Ecriture complexe de $S_2 \circ S_1$:** $z \xrightarrow{S_1} z_1 \xrightarrow{S_2} z_2$;

$z_2 = \dfrac{1}{2}(1-i)\,z_1 + \dfrac{1}{2}(7+3i)$ avec $z_1 = (1-i)\,z -2 -i$ d'où $z_2 = -iz+2+2i$ cqfd — 0,5

Affixe de F milieu de [AB] $f = 2$ — 0,25

Image de D par $S_2 \circ S_1$: $S_2 \circ S_1(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(C) = G$ — 0,25

$S_2 \circ S_1$ est la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point F. — 0,75

FGD est un triangle rectangle isocèle car FD = FG et $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FG}) = -\dfrac{\pi}{\cancel{4}\,2}$ — 0,25

Exercice 2 (4,5 points)

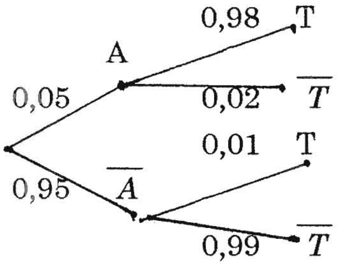
Soit les événements A : " L'individu est atteint par le virus du sida "

T : " le test est positif "

Traduction des données :

$P(A) = 0{,}05$; $P(\overline{A}) = 0{,}95$; $P(T/A) = 0{,}98$; $P(\overline{T}/\overline{A}) = 0{,}99$.

1°) a) **Illustration de la situation par un arbre pondéré** — 0,5



1/4

1°) b) **La probabilité d'avoir un test positif :** 1

$P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap \overline{A}) = P(A)\,P(T/A) + P(\overline{A})\,P(T/\overline{A}) = 0{,}0585$

1°) c) **La probabilité d'être atteint si le test est positif :** 1

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A) \bullet P(T/A)}{P(T)} = 0{,}8376$$

2°) a) **La probabilité d'être atteint si le test est positif avec P(A) = x**

$P(\overline{A}) = 1 - x$;

$P(T) = P(A)\,P(T/A) + P(\overline{A})\,P(T/\overline{A}) = x \times 98 \times 10^{-2} + (1-x) \times 10^{-2} = (97x+1)10^{-2}$. 0,25

$P(A \cap T) = x \times 98 \times 10^{-2}$. 0,25

D'où : $P(A/T) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{x \times 98 \times 10^{-2}}{(97x+1) \times 10^{-2}} = \dfrac{98x}{97x+1} = p(x)$ 0,5

2°) b) **Variation de la fonction p(x)**

$p(x) = \dfrac{98x}{97x+1}$; $\quad p'(x) = \dfrac{98}{(97x+1)^2}$

x	0	1
signe de p'	+	
p	0 $\nearrow$	1

0,5

Représentation 0,5

Problème (10 points)

Partie A (3 points)

Soit (E) : $\quad y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

1°) ***g* est solution de (E)**

$x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ alors : $g'(x) = -e^{x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\dfrac{e^x}{1+e^x} = -g(x) + \dfrac{1}{1+e^x}$

donc : $g'(x) + g(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ alors g est solution de (E). 0,5

2°) **On pose $f = g + h$ f solution de (E) ssi h solution de (E')**

(f est solution de (E)) $\Leftrightarrow \forall x \in IR,\ f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

$\Leftrightarrow g'(x) + h'(x) + g(x) + h(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ or g est solution de (E)

$\Leftrightarrow h'(x) + h(x) = 0 \Leftrightarrow h\ est\ de\ (E') : y' + y = 0$. 0,5

3°) **Résolution de (E'), solution générale de (E)**

les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$

donc la solution générale de (E) est : $y = e^{-x}\left[k + \ln(1+e^x)\right]$ avec $k \in \mathbb{R}$. 0,5

4°) a) **Décomposition de $1/(1+e^x)$.**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{ae^x}{1+e^x} + b \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$. 0,5

4°) b) **U primitive de *u***

$u(x) = \dfrac{1}{1+e^x} = -\dfrac{e^x}{1+e^x} + 1$ alors une primitive sur $\mathbb{R}$ est $U(x) = -\ln(1+e^x) + x$. 0,5

4°)c) **Une primitive G de g**

puisque $g(x)=u(x)-g'(x)$ donc $G(x)=U(x)-g(x)=x-(e^{-x}+1)\ln(1+e^{x})$. 0,5

Partie B (2,25 points)

$$\varphi(x)=e^{x}g'(x)$$

1°) **Autre expression de φ,**

on sait que : $g'(x)=-g(x)+\dfrac{1}{1+e^{x}}=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\dfrac{1}{1+e^{x}}$

d'où : $\varphi(x)=e^{x}g'(x)=e^{x}\left[-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\dfrac{1}{1+e^{x}}\right]=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln(1+e^{x})$. 0,25

2°) **Limite de φ en $-\infty$**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(1+e^{x})\right]=0$ d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ 0,5

3°) **φ est strictement décroissante, signe de φ**

$\varphi'(x)=-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{x})^{2}}$ la dérivée de φ est négative sur $\mathbb{R}$, donc φ est strictement décroissante. Pour 0,5
tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\varphi(x)\leq\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$, φ est négative sur $\mathbb{R}$. 0,5

4°) **Signe de $g'(x)$ et sens de variation de g.**

$\varphi(x)=e^{x}g'(x)$, φ et g' ont le même signe sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$ $e^{x}>0$ 0,5

$g'(x)$ est négative sur $\mathbb{R}$ et g est strictement croissante.

Partie C (4,75points)

1°) Limite de φ ne $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln(1+e^{x})\right]=-\infty$ 0,25

2°) $\varphi(x)-1+x=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln\left[e^{x}(1+e^{-x})\right]-1+x=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-1-\ln(1+e^{-x})$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}=1;$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\varphi(x)-(-x+1)\right]=0$ 0,5

La droite d'équation $y=-x+1$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

3°) Tableau de variation (évident) 0,25

4°) Limites et variations de g

$g(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})=\dfrac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ 0,25

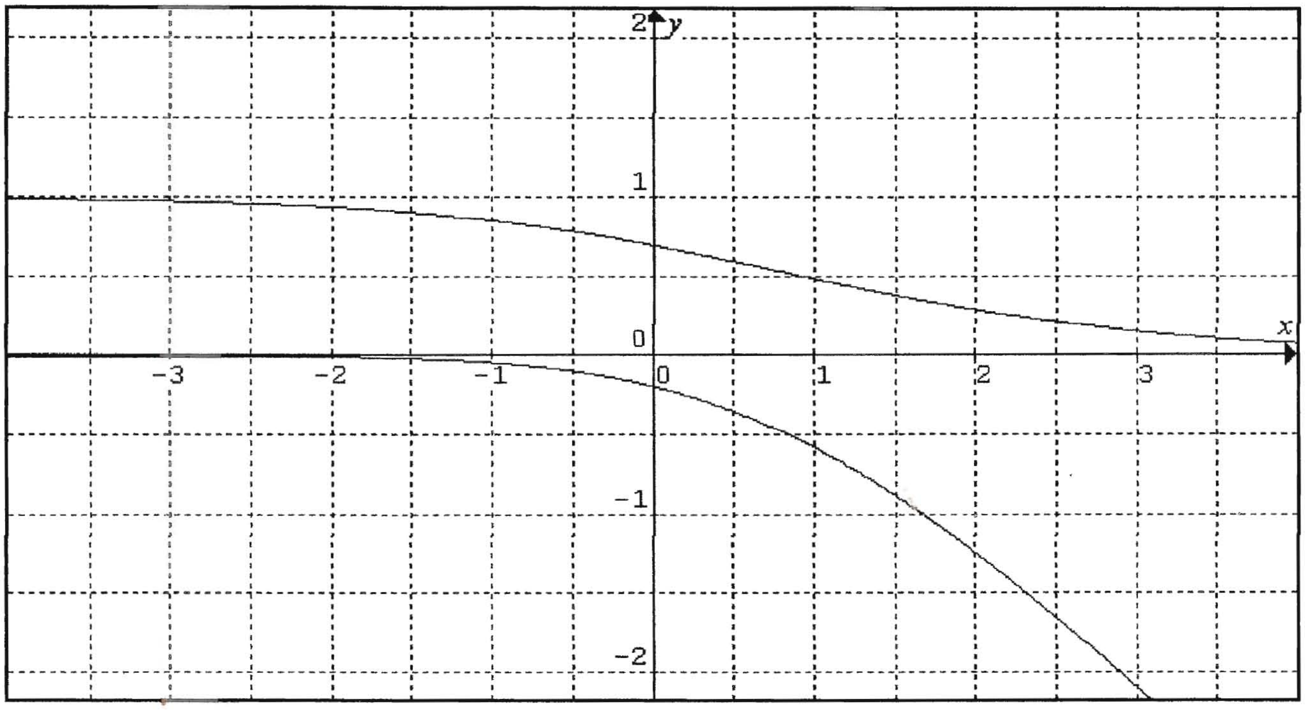
et $\dfrac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}=\dfrac{\ln(1+e^{x})}{1+e^{x}}\times\dfrac{1+e^{x}}{e^{x}}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{Y\to+\infty}\dfrac{\ln Y}{Y}\times\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1+X}{X}=0\times1=0$ 0,5

Tableau de variation de g

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de g'	$-$
g	$1 \searrow 0$

0,25

5°) construction de C et de Γ



1

6°) **Calcul de l'intégrale I(α)**

$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} g(x)dx = \left[G(x)\right]_0^{\alpha} = \left[x - (e^{-x} + 1)\ln(1 + e^{x})\right]_0^{\alpha} = \alpha - (1 + e^{-\alpha})\ln(1 + e^{\alpha}) + 2\ln 2$ 1

I(*α*) est l'aire du domaine compris entre Γ, l'axe (*Ox*), l'axe (*Oy*) et la droite d'équation $x = \alpha$.

7°) **Limite de *I*(*α*)**

$I(\alpha) = -g(\alpha) - \ln\left[e^{\alpha}(1 + e^{-\alpha})\right] + \alpha + 2\ln 2$ 0,5

on trouve $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 2\ln 2$

Interprétation de ce résultat 0,25