

B

REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

1-Mathématiques-2005

Série : D
Durée : 4 heures
Cœf. : 4

Exercice 1 (5 points)

Sur les quatre faces d'un dé pipé tétraédrique sont inscrits les nombres complexes suivants

$$z_0 = -2i, z_1 = -2-2i, z_2 = 1-i \text{ et } z_3 = -1+i\sqrt{3}.$$

On lance une fois ce dé.

La probabilité p_k pour que la face marquée z_k soit cachée est $p_k = c|z_k|^2$, pour $k \in \{0,1,2,3\}$ et $c \in \mathbb{R}$.

- 1- a) Montrer que $c = \frac{1}{18}$.
- b) Déterminer p_k pour $k \in \{0,1,2,3\}$.
- 2- On désigne par X la variable aléatoire qui, au complexe inscrit sur la face cachée associe son unique argument appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi[$.
 - a) Déterminer les valeurs prises par X .
 - b) Donner la loi de probabilité de X .
 - c) Calculer l'espérance mathématique de X .
- 3- On considère dans \mathbb{C} le polynôme $f(z) = z^3 + (1+5i)z^2 + 2(-5+i)z - 8i$.
 - a) Vérifier que z_0 est une racine de $f(z)$.
 - b) En déduire deux nombres complexes α et β tels que $f(z) = (z+2i)(z^2 - \alpha z + \beta)$.
 - c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 2: (5 points)

Dans un repère orthonormé direct (O, J, J, K) de l'espace E , on considère les points $A(1, 0, 3)$, $B(2, -1, 0)$ et $C(0, -1, 4)$.

- 1- Représenter les points A , B et C (Unité graphique 1 cm)
- 2- Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- 3- Les points A , B et C sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.
- 4- Déterminer une équation du plan (ABC) et calculer l'aire du triangle ABC .
- 5- On donne les équations de deux plans $P_1: -x+3y-2z=7$ et $P_2: 5x-2y-z=-8$.
 - a) Résoudre le système
$$\begin{cases} -x+3y-2z=7 \\ 5x-2y-z=-8 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$$
 - b) En déduire l'intersection des plans P_1 , P_2 et (ABC) .

B

Problème : (10 points)

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = |x-1| - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité graphique étant égale à 2 cm.

Partie A

1. Montrer que f est définie sur $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.
4. Etudier les variations de f .
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée x_0 appartenant à l'intervalle $] -2, -1[$.
6. Démontrer que les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = 1 - x$ sont asymptotes à la courbe (\mathcal{C}) .
7. Construire (\mathcal{C}) . On tracera en particulier les demi-tangentes à droite et à gauche du point d'abscisse 1 de la courbe (\mathcal{C}) .
8. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]1, +\infty[$ est une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
9. Tracer dans le repère $(O; I, J)$ la représentation graphique (Γ) de la bijection réciproque g^{-1} de g .
10. Montrer que (\mathcal{C}) et (Γ) se coupent en un point A de la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées de A .

Partie B

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

1. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.
(On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 à droite.

Partie C

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie par $u_n = n - 1 - 2 \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = f(n)$.

1. Montrer que (u_n) est une suite monotone.
2. Quelle est sa limite ?
3. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
 - a. Démontrer que $S_n = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1)$.
 - b. Quelle est la limite de (S_n) ?

Corrigé Série D

math 2005

Corrigé 1_D

Exercice n°1 5 points

1. a) On demande de montrer que $c = \frac{1}{18}$.

On a $|z_0|^2 = 4$, $|z_1|^2 = 8$, $|z_2|^2 = 2$ et $|z_3|^2 = 4$. Or les quatre réels p_k définissent sur l'univers des quatre faces du dé une probabilité si on a

$$\sum_{k=0}^3 p_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^3 c |z_k|^2 = 1 \Leftrightarrow 18c = 1 \text{ D'où le résultat}$$

- b) On demande les valeurs des p_k .

On a $p_0 = \frac{2}{9}$, $p_1 = \frac{4}{9}$, $p_2 = \frac{1}{9}$ et $p_3 = \frac{2}{9}$

2. a) On demande les valeurs prises par X .

Comme $z_0 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ et $z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

X prend donc dans l'ordre croissant les valeurs suivantes $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$

- b) loi de probabilité de X .

X a pour loi de probabilité la distribution suivante :

x_i	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

- c) Espérance mathématique de X .

On a $E(X) = \frac{2 \times 2\pi + 2 \times \pi + 4 \times 5\pi + 1 \times 7\pi}{9} = \frac{11\pi}{3}$

3. a) On demande de vérifier que z_0 est racine de $f(z)$

On trouve que $f(z_0) = 0$

- b) Dédution demandée.

Comme z_0 est une racine de $f(z)$, le polynôme est factorisable par $z - z_0$ et on trouve par exemple par division

euclidienne $f(z) = (z + 2i)[z^2 + (1 + 3i)z - 4]$ d'où $\alpha = 1 + 3i$ et $\beta = -4$

- c) Résolution de $f(z) = 0$.

On trouve $z + 2i = 0$ (1) ou $z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0$ (2)

(1) donne $z = -2i$ et pour résoudre (2) on calcule le discriminant $\Delta = 8 + 6i$ dont il

faut déterminer une racine carrée $\delta = a + ib$ en résolvant l'équation $\delta^2 = \Delta$ qui se ramène au système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \text{ avec } a^2 + b^2 = 10 \text{ on trouve donc } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab = 3 \end{cases} \text{ on pourra prendre } \delta = 3 + i$$

et obtenir les deux solutions de (2) comme $\frac{-1 - 3i + 3 + i}{2} = 1 - i$ et $\frac{-1 - 3i - 3 - i}{2} = -2 - 2i$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est $\{-2i, 1 - i, -2 - 2i\}$

- 4 On demande le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui transforme (A, C) en (B, D) .

Il s'agit donc de trouver le module et un argument du quotient

0,5

1

1

0,25

0,25

0,25

0,5

0,75

complexe $\frac{(4-(1+3\sqrt{3})i)-(1-i)}{(-2-2i)+2i} = \frac{-3+3i\sqrt{3}}{2} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi le rapport cherché est 3 et

l'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

0,5

Exercice n°2 5 points

1. Figure

2. Coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

0,75

3. Les points A, B et C ne peuvent être alignés car $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

4. * Equation du plan (ABC) :

Pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
ce qui donne $2x - y + z = 5$

* Aire du triangle ABC :

Soit A l'aire en cm^2 du triangle ABC. On a : $A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6}$

0,75

5. Soit à résoudre le système proposé

$$\begin{cases} -x+3y-2z=7 \\ 5x-2y-z=-8 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=17 \\ 7x-3y=-3 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x=48 \\ 3x+y=17 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=8 \\ z=7 \end{cases} . \text{ Ainsi le système}$$

admet un unique triplet solution

6. Intersection des trois plans.

Elle est constituée d'un seul point, le point $D(3, 8, 7)$

0,5

0,5

0,5

1,5

0,5

Problème 10 points

Partie A

1. Ensemble de définition de f.

La fonction f est définie pour $\frac{x}{x+1} > 0$, tableau de signe d'où le résultat annoncé.

2. limites aux bornes de D_f .

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et que $\lim_{l \rightarrow 1} \ln = 0$ alors on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x-1| = +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = +\infty$ et $\lim_{l \rightarrow +\infty} \ln = +\infty$ or $\lim_{x \rightarrow -1^+} |x-1| = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0$ et $\lim_{l \rightarrow -\infty} \ln = -\infty$ or $\lim_{x \rightarrow 0} |x-1| = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

3. Continuité de f en 1.

On a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \ln 2 = f(1)$; f est bien continue en 1.

Dérivabilité de f en 1.

On a pour tout réel h non nul $f(1+h) = |h| - 2 \ln\left(\frac{1+h}{2+h}\right) = |h| + 2 \ln(2+h) - 2 \ln(1+h)$

On a donc $f(1+h) - f(1) = |h| + 2(\ln(2+h) - \ln 2) - 2 \ln(1+h)$ et par conséquent

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|h|}{h} + \frac{\ln(1+\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} - 2 \frac{\ln(1+h)}{h}, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \text{ et}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2$. On peut conclure que f n'est pas dérivable en 1 mais l'est à droite

et à gauche en ce point, avec $f'_g(1) = -2$ et $f'_d(1) = 0$.

0,5

0,25
0,25

0,25

0,25

0,5

1

4. Variations de f .

Sur $D_f \setminus \{1\}$ la fonction f est dérivable et on a pour x appartenant à $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$

$$f'(x) = -1 - \frac{2}{x(x+1)} \text{ par ailleurs sur }]1, +\infty[, \text{ on a } f'(x) = 1 - \frac{2}{x(x+1)}$$

Il est aisé de constater que sur $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ on a $f'(x) < 0$ et que sur $]1, +\infty[$ on a

$$f'(x) > 0 \text{ puisque dans ce dernier cas } f'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x(x+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-		+
f	$+\infty$ ↙ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $2 \ln 2$		$+\infty$ ↗ $+\infty$

5. Equation $f(x) = 0$.

Avec un minimum strictement positif sur $]0, +\infty[$ l'équation $y = 0$ est impossible. La restriction de f à $]-\infty, -1[$ est continue et strictement décroissante, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur \mathbb{R} . Tout réel donc et 0 en particulier est image par f d'un unique réel de $]-\infty, -1[$. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution x_0 et comme $f(-2) = 3 - 2 \ln 2 > 0$, on doit avoir $-2 < x_0 < -1$

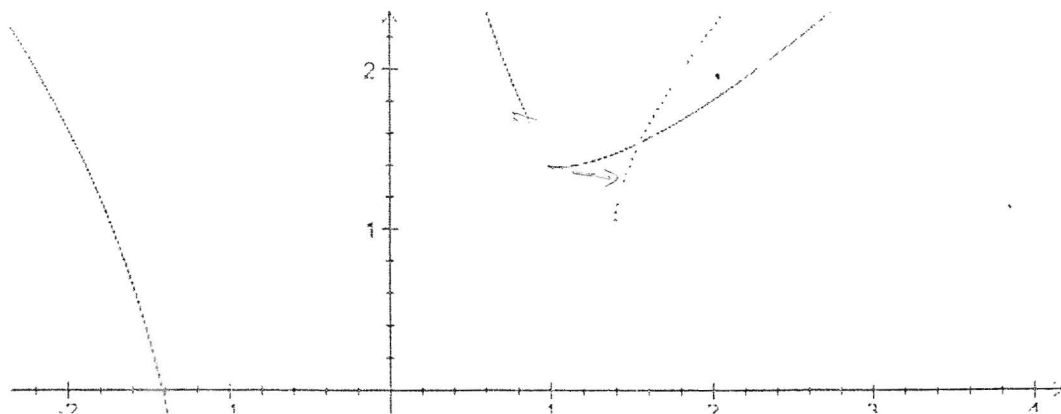
6. Asymptotes à (\mathcal{L}_f) en $\pm\infty$.

On a obtenu précédemment que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ ce qui veut dire que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - |x-1|) = 0, \text{ résultat qui traduit que les droites d'équations } y = 1-x \text{ et } y = x-1$$

sont respectivement asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

7. Représentation graphique.



8. Une bijection.

La restriction g de f à $]1, +\infty[$ est continue strictement croissante ; elle réalise donc une bijection d'un intervalle sur son image $[2 \ln 2, +\infty[$

9. Complément graphique.

Voir le graphique

10. Intersection de (\mathcal{L}_f) et (Γ)

Soit A un point s'il existe d'abscisse a de (\mathcal{L}_f) et de la droite d'équation $y = x$. On aura $a = f(a)$ s'ensuit que $g(a) = f^{-1}(a) = f^{-1} \circ f(a) = a$ ce qui signifie que le point A appartient aussi à (Γ) . Il reste à

0,75

0,25

0,5

0,5

1

0,25

0,25

0,25

prouver l'existence de A et à déterminer ses coordonnées. Or $f(x) = x \Leftrightarrow x-1-2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = x$

sur l'intervalle $[1, +\infty[$ soit à $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ d'où $x = \frac{1}{\sqrt{e}-1}$. Le point A existe

bel et bien et a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{e}-1}, \frac{1}{\sqrt{e}-1}\right)$.

Partie B

1. En unité d'aire on a $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^1 - 2 \int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$. Le calcul par

intégration par parties de $\int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ donne $[x \ln x - (x+1) \ln(x+1)]_{\alpha}^1$ en effet avec

par exemple $u'(x) = 1$ on peut prendre $u(x) = x+1$ et $v(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ on a

$v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. On a donc $\int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx = (x+1) \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \int_{\alpha}^1 \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) dx$ qui

après simplification donne bien $[x \ln x - (x+1) \ln(x+1)]_{\alpha}^1$. On trouve donc

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} + 4 \ln 2 - \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 + 2 \alpha \ln \alpha - 2(\alpha+1) \ln(\alpha+1).$$

2. En unité d'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ a pour limite $\frac{1}{2} + 4 \ln 2$ en 0 à droite

Partie C

1. La suite étant la restriction à \mathbb{N}^* d'une fonction strictement croissante sur $[1, +\infty[$ est aussi strictement croissante.

2. Comme la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ alors la suite a pour limite $+\infty$.

3. On a $S_n = \sum_{k=1}^n \left(k-1-2 \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right) = \sum_{k=1}^n k - n - 2 \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} - n - 2 \ln \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{n(n-1)}{2} - 2 \ln \frac{1}{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1).$$

On trouve donc que S_n a pour limite $+\infty$.

0,5

1

0,25

0,25

0,25

1