B

REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONALE DE BACCALAUREAT

2003-1-MATHEMATIQUES
Série : D
Durée : 4 h
Coef. : 4

Exercice 1 **(5 points)**

1° On considère le polynôme $P(z)$ défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par :

$$P(z) = z^3 + 2\,(5-2i\,)z^2 - 2\,(4+23i\,)z - 4\,(8-27i\,).$$

a) Montrer que l'équation : $P(z)=0$, a une solution réelle, puis déterminer les nombres complexes u et v tels que : $P(z) = (z-2)\left(z^2 + uz + v\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2}\right)$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives : $a = 2$; $b = -1+5i$ et $c = -11-i$, et on désigne par S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C.

a) Placer les points A, B et C.

b) Calculer le quotient complexe : $\alpha = \dfrac{c-b}{b-a}$, puis en préciser le module et un argument.

c) En donnant une interprétation géométrique du module et d'un argument du nombre complexe α, préciser le rapport et l'angle de la similitude S, puis donner la nature du triangle ABC.

d) (Γ) désigne le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer l'affixe du centre I et le rayon R de (Γ).

e) Donner l'écriture complexe de la similitude S.

f) En déduire l'affixe du centre K du cercle (Γ_0) dont l'image par S est le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

Exercice 2 **(4 points)**

A l'occasion d'une tombola, la coopérative d'un lycée utilise une urne contenant : 6 billets noirs et 4 billets blancs, indiscernables au toucher.

Un essai consiste à tirer simultanément et au hasard 3 billets de l'urne. Lors d'un essai, un bon est remis à toute personne ayant obtenu au moins 2 billets blancs. Après chaque tirage, les billets sont remis dans l'urne.

1° Une personne effectue un essai. On note X, la variable aléatoire réelle égale au nombre de billets blancs obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un bon ?

2° Une partie comporte 4 essais consécutifs. Un lot est remis à toute personne ayant obtenu au moins 3 bons dans la partie.

Quelle est la probabilité d'obtenir un lot au cours d'une partie ?

Problème (11 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$, par : $f(x)=\dfrac{1+x}{x+e^{-x}}$, et on désigne par ($\boldsymbol{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$, d'unité graphique : 4 cm

Partie A : ***Etude d'une fonction auxiliaire*** **(2 points)**

Soit la fonction g définie sur $[0\ ;+\infty[$, par : $g(x)=x+2-e^{x}$

1° Etudier le sens de variation de g et déterminer la limite de g en $+\infty$

2°

a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule α dans $[0;+\infty[$ et que : $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : ***Etude et représentation graphique de f*** **(5,25 points)**

1°

a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à. $[0\ ;+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{e^{-x}g(x)}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}$.

b) En déduire le sens de variation de f.

2°

a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à, $[0\ ;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}+1$.

b) En déduire la limite de f en. $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3° Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe ($\boldsymbol{C}$) au point d'abscisse 0

4°

a) Etablir que pour tout réel x de, $[0\ ;+\infty[$, on a : $f(x)-(x+1)=\dfrac{(x+1)u(x)}{x+e^{-x}}$ avec. $u(x)=1-x-e^{-x}$

b) Etudier le sens de variation de u sur $[0\ ;+\infty[$, puis en déduire le signe de $u(x)$

c) Déduire des questions précédentes, la position de ($\boldsymbol{C}$) par rapport à (T)

5° Tracer avec soin (T) et ($\boldsymbol{C}$)

Partie C : ***Etude d'une bijection*** **(1,75 points)**

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha\ ]$.

1° Justifier que h est une bijection de $[0\ ;\ \alpha\ ]$, sur un intervalle J que l'on précisera. Soit h^{-1}, la bijection réciproque de h.

2°

a) Sur quel intervalle h^{-1} est-elle dérivable ? Justifier.

b) Sans expliciter h^{-1}, calculer.$(\ h^{-1}\ )'(\ 1\ )$

3° Construire avec soin la courbe ($\boldsymbol{C'}$) de h^{-1} dans le repère précédent.

Partie D : ***Etude d'une intégrale*** **(2 points)**

1° Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \int_{n+2}^{n+3} f(x)\,dx$.

a) Calculer V_0. (On rappelle que. $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} + 1$)

b) En déduire la valeur exacte en cm² de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 2$ et $x = 3$.

2°

a) Interpréter graphiquement. V_n.

b) Montrer que, pour tout naturel n, on a : $f(n+3) \leq \int_{n+2}^{n+3} f(x)\,dx \leq f(n+2)$. En déduire alors le sens de variation de la suite V_n.

c) Déterminer la limite de la suite V_n.

-/-