

BAC C R.C.I.

session 92

EXERCICE I

1°) a) Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide le P.G.C.D. de 3046 et 45.

b) Que peut-on en conclure pour les nombres 3046 et 45?

2°) Soit l'équation (E) dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

$$(E) \quad 3046x - 45y = 1.$$

a) Démontrer que tout couple (x, y) solution de (E) est tel que x et y soient premiers entre eux.

b) Utiliser l'algorithme d'Euclide de la question 1a) pour écrire cinq divisions euclidiennes permettant d'exprimer 1 comme combinaison linéaire de 3046 et 45. En déduire une solution particulière de (E).

c) Vérifier que le couple $(16, 1083)$ est solution de (E) puis résoudre (E).

d) Donner deux autres solutions de (E).

EXERCICE II

Le plan (\mathcal{P}) est muni du repère (O, I, J) (unité : 1 cm sur les deux axes.)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(x) = 2x - 2xe^{-\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°) a) Étudier la continuité de f en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Déduire de ces questions les intervalles de \mathbb{R} sur lesquels f est dérivable.

2°) a) Définir la fonction dérivée f' de la fonction f .

b) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = A(x)k(x)$

où A est une fonction strictement positive sur \mathbb{R}^* et k la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^* par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$k(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}$$

3°) Étude de la fonction k .

a) Justifier que k est dérivable en tout point de \mathbb{R}^* et donner les variations de k .

b) Déterminer $\lim_{-\infty} k$ et $\lim_{+\infty} k$ (On ne calculera pas $\lim_0 k$).

c) Déduire de ces questions le signe de $k(x)$ selon les valeurs de x élément de \mathbb{R}^* .

4°) a) Donner le tableau de variation de f .

b) Déterminer $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f$.

c) Justifier que la courbe (\mathcal{C}_f) représentative de f dans le repère (O, I, J) , admet deux asymptotes que l'on précisera.

d) Tracer (\mathcal{C}_f) . On précisera la situation géométrique au point O .

PROBLEME

Le plan (\mathcal{P}) est orienté.

On considère une droite (D) fixe de (\mathcal{P}) et un point O fixe de (\mathcal{P}) qui n'est pas élément de (D)

Partie A:

1°) Soit M un point quelconque de (D) et (Δ_M) la droite passant par M et perpendiculaire à la droite (OM) .

Soit M_1 le point de (Δ_M) tel que :

$$\begin{cases} OM = MM_1 \\ (O, M, M_1) \text{ est un triplet de sens direct.} \end{cases}$$

a) Soit M_2 le point de (Δ_M) distinct de M_1 tel que $MM_1 = MM_2$

Faire une figure comprenant tous ces éléments et justifier que le triplet (O, M, M_2) est de sens indirect.

b) Justifier qu'il existe deux similitudes directes s_1 et s_2 laissant O invariant et vérifiant:

$$\text{d'une part : } \forall M \in (D) \quad s_1(M) = M_1$$

$$\text{d'autre part : } \forall M \in (D) \quad s_2(M) = M_2$$

Donner les éléments caractéristiques de ces deux similitudes.

c) Montrer qu'il existe un seul point N de (D) tel que $s_1(N)$ et $s_2(N)$ soient éléments de (D) .

2°) On note $s_1(N) = N_1$ et $s_2(N) = N_2$

a) Placer sur la figure les points N, N_1 et N_2 puis les points N'_1 et N'_2 définis par $s_1(N_1) = N'_1$ et $s_2(N_2) = N'_2$.

b) Démontrer que O est le milieu du segment $[N'_1 N'_2]$ et que la droite $(N'_1 N'_2)$ est parallèle à (D)

Partie B

1°) Soit (Δ_1) et (Δ_2) les ensembles respectivement décrits par M_1 et M_2 lorsque le point M décrit (D) .

a) Donner la nature de (Δ_1) et (Δ_2) . Préciser ces ensembles. (On pourra utiliser deux points fixes éléments de (Δ_1) et deux points fixes éléments de (Δ_2)). Construire ces deux ensembles.

b) Soit H le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2) . Montrer que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires en H .

c) Montrer que les points H, N et O sont alignés et préciser leur position particulière.

2°) Justifier que les triangles ON_1N_2 et $N'_1HN'_2$ sont semblables et que la similitude s' transformant le triplet (N_1, O, N_2) en (N'_1, H, N'_2) est une similitude indirecte. Préciser son rapport.

3°) Soit Ω le centre de la similitude s' . Le but de cette question est de déterminer la position de Ω , puis de caractériser s' .

a) Justifier que s' ou s' est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Déterminer $[s' \circ s'](N)$.

c) Déduire de 3a) et 3b) que Ω est l'isobarycentre du triangle $HN'_1N'_2$.

d) Terminer la caractérisation de s' . (On précisera la position de l'axe que l'on tracera sur la figure).

4°) a) Justifier que, pour toute position du point M sur (D) , les points O, M, M_1 et N_1 sont éléments d'un même cercle (C_{M1})

b) Déterminer et construire l'ensemble des centres des cercles (C_{M1}) lorsque M décrit (D) .